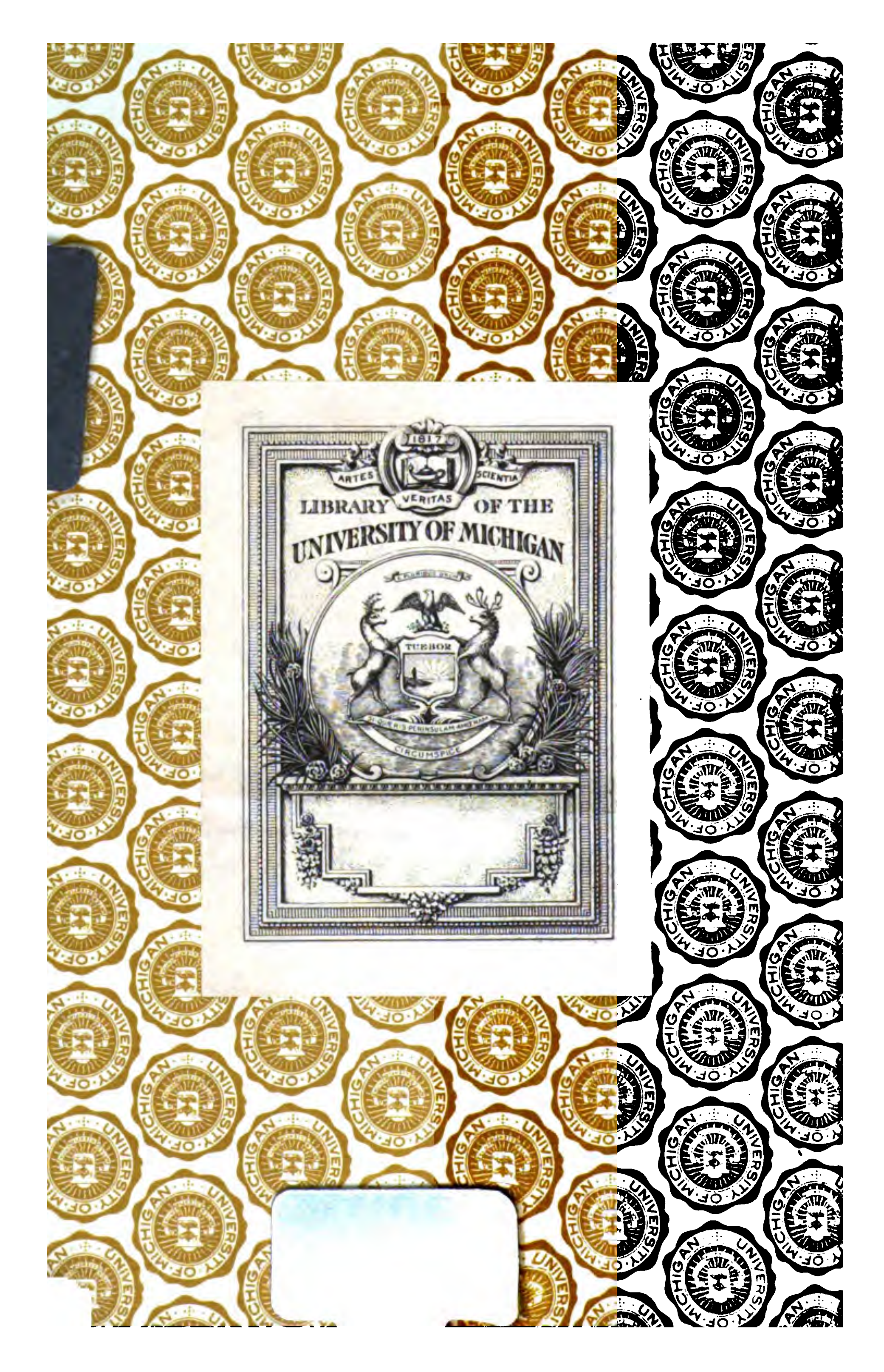
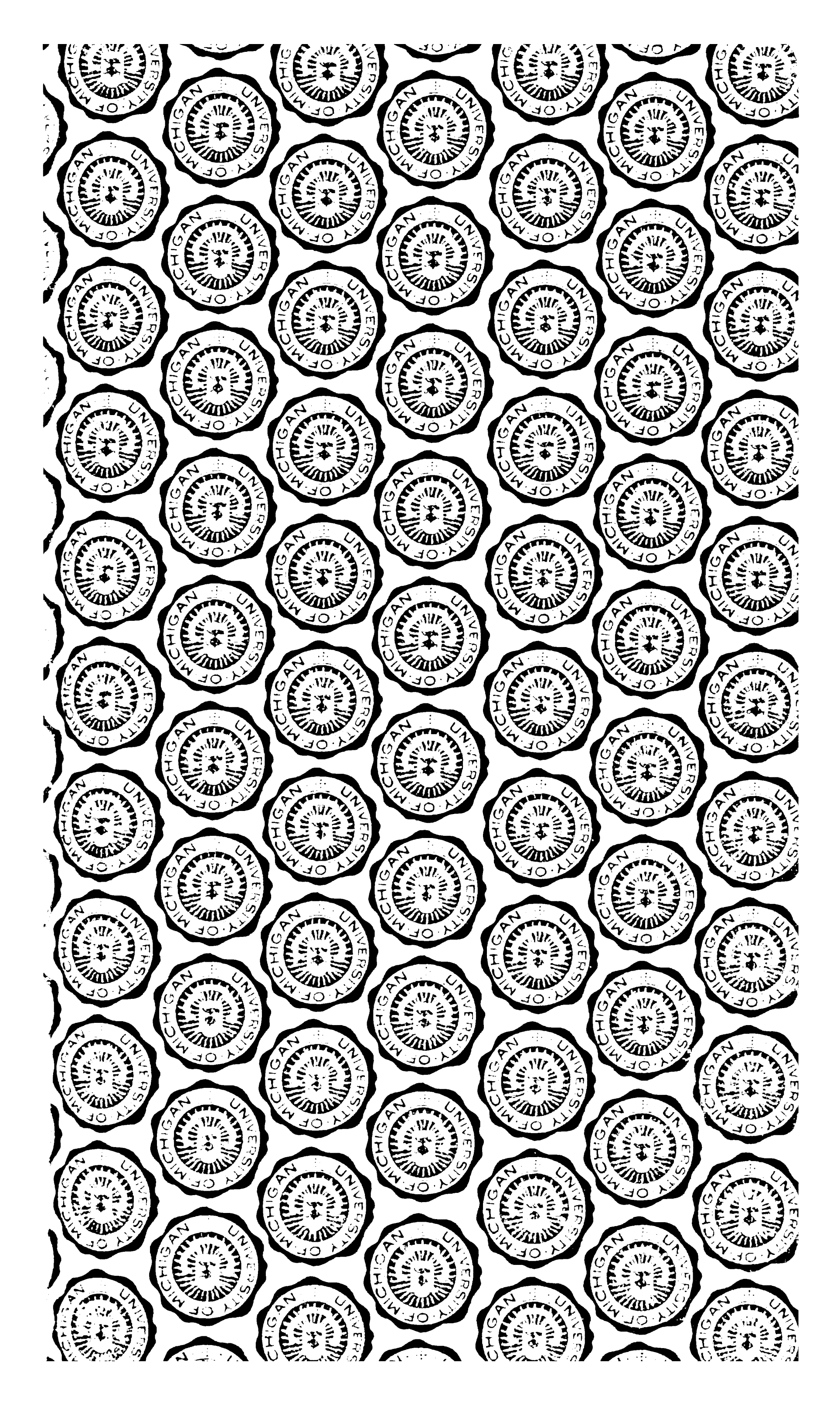


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


UNIVERSITY OF MICHIGAN

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME IV.

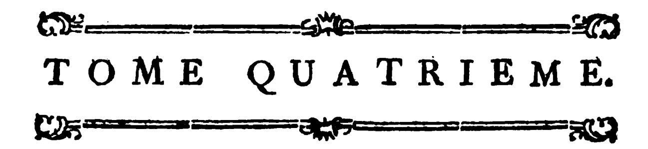
COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME IV.

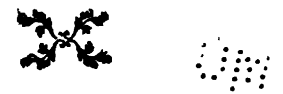
COURS COMPLET DE MATHEMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.



TOME QUATRIEME.



A PARIS,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain.

M. DCC. LXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

NOUS avons expliqué dans la section précédente les principes généraux du Calcul Intégral, nous allons maintenant en faire l'application à la Géométrie.

SECTION II.

Des usages du Calcul Intégral dans la Géométrie.

1°. Selon ce qu'on a dit vers le commencement de la section précédente, la différentielle de x^m est $mx^{m-1}dx$ & *son intégrale* x^m, *se trouve en augmentant l'exposant de* x *d'une unité, & en divisant par* dx, *& par cet exposant ainsi augmenté, c'est ce que nous appellerons la regle fon-*

damentale. La différentielle de $\frac{y}{x}$ est $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$ & $S\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{y}{x}$, $\frac{dx}{x}$ représente la différentielle du logarithme hyperbolique de x, ou la différentielle de $L.x$. de sorte que $S.\frac{dx}{x} = Lx$. La différentielle de yx est $y\,dx + x\,dy$, & $S\,(y\,dx + x\,dy) = yx$ *. x & y peuvent représenter dans ces formules des variables quelconques, simples ou composées, comme on voudra ; donc si une différentielle peut se réduire par substitution à quelqu'une de ces formules générales de différentielles, on en trouvera tout d'un coup l'intégrale, en faisant les mêmes substitutions dans l'intégrale commune de cette formule générale ; c'est ainsi qu'en comparant la différentielle $m\,u^n x^{m-1}\,dx + n\,x^m u^{n-1}\,du$ avec la formule de même espèce $y\,dx + x\,dy$, on trouve qu'en substituant u^n pour y & x^m pour x, elle se réduit à la différentielle proposée **; d'où l'on conclud que faisant les mêmes substitutions dans yx, intégrale de $y\,dx + x\,dy$, l'on aura $u^n x^m$. pour l'intégrale de la différentielle proposée : on voit de même que $S.\,\frac{m\,u^n.\,z^{m-1}.\,dz + n\,z^m\,u^{n-1}\,du}{z^{m}.\,u^{n}} =$

* En relisant les commencemens de la section précédente, on comprendra tout cela facilement.

** Car alors on doit substituer $m\,x^{m-1}\,dx$ pour dx & $n\,u^{n-1}\,du$ pour dy.

L. $z^m . u^n$. * : car en ſubſtituant $z^m . u^n$ au lieu de x, la différentielle $\frac{dx}{x}$ ſe réduit à la différentielle propoſée ; d'où l'on conclut qu'en ſubſtituant auſſi $z^m . u^n$ au lieu de x dans L. x qui eſt l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, l'on aura L. $z^m u^n$ pour l'intégrale de la différentielle propoſée. Mais ce moyen d'intégration qui eſt ſouvent utile, n'eſt pas toujours facile; parce qu'on n'a pas de méthode ſûre pour les choix des formules & pour les ſubſtitutions. Nous donnerons dans la ſuite d'autres méthodes.

On peut intégrer toute formule dont la quantité hors du ſigne (qui indique une puiſſance, ou une racine) eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne.

Par exemple, l'intégrale de $12 a x^3 . dx \times (b + a x^4)^2$ eſt $= (b + a x^4)^3$: car en ſubſtituant $b + a x^4$ au lieu de x, $m - 1$ au lieu de 2, $4 a x^3 dx$, au lieu de dx, & m au lieu de 3, l'on aura $m x^{m-1} dx$ égal à la différentielle propoſée, & $x^m = (b + a x^4)^3$; c'eſt-à-dire, que dans ce cas on trouve l'intégrale en augmentant l'expoſant de la quantité ſous le ſigne d'une unité, & diviſant par cet expoſant & par la différentielle de la quantité ſous le ſigne.

* L. déſigne ici le logarithme hyperbolique.

On peut intégrer algébriquement * ou par logarithmes, toute quantité binome ** de cette forme $a x^m . d x . (b + g . x^n)^p$, toutes les fois que p est un nombre entier positif. Car en élevant le binome à la puissance p, l'on aura un nombre $p + 1$ de termes, qui étant multipliés par $a x^m . d x$ seront tous de cette forme $c x^r . d x$, & seront tous intégrables algébriquement, si l'exposant r est différent de -1, & par les logarithmes, lorsque cet exposant sera $= -1$. Si $p = 2$, l'on aura $(b + g x^n)^p = b^2 + 2 b g . x^n + g^2 x^{2n}$. Multipliant chacun des termes de cette quantité par $a x^m dx$, on trouve $a b b x^m dx + 2 b g a x^{m+n} d x + a g g x^{m+2n} d x$. L'intégrale du premier terme est, par la regle fondamentale, $\frac{a b b}{m + 1} x^{m+1}$ celle du second terme est $\frac{2 b g a}{m + n + 1} x^{m+n+1}$. Celle du troisieme qui, en faisant $2 n + m = r$ & $a g g = c$, devient $c x^r . dx$, sera $\frac{c}{r+1} x^{r+1}$. Si $r = -1$, l'on a $S . c . x^r d x = S . c x^{-1} d x$

* C'est-à-dire, trouver pour intégrale une expression algébrique qui ne contienne ni logarithmes ni suites infinies, ni aucune quantité non algébrique.

** C'est-à-dire, dont la quantité complexe la plus composée est une puissance d'un binome.

$= S c \frac{dx}{x} = c L. x$. Si $a g g = c = 1$, l'on aura $\frac{c dx}{x} = \frac{dx}{x}$ & $S. c \frac{dx}{x} = L. x$. On voit bien aisément que si la quantité sous le signe étoit un trinome, un quadrinome, ou un polinome quelconque d'un nombre fini des termes & p un nombre entier positif en élevant le polynome à la puissance p & multipliant ensuite chacun des termes par $a x^m . d x$, l'on auroit une differentielle intégrable, puisque chacun des termes de cette differentielle seroit intégrable.

On peut intégrer toute quantité binome dont l'exposant de x hors du binome étant augmenté d'une unité est égal à l'exposant de x dans le binome quelque soit l'exposant p de la quantité sous le signe. Ainsi, si $m = n - 1$, l'on aura $a x^{n-1} . d x . (b + g x^n)^p$ (A) mais la différence de $b + g x^n$ est $= g n . x^{n-1} d x$. Augmentant d'une unité l'exposant n de la quantité sous le signe, divisant par la différentielle de la même quantité, & par l'exposant ainsi augmenté, l'on aura $S. a x^{n-1} . d x \times (b + g x^n .)^p = \frac{a}{g n . p + 1} . (b + g x^n)^{p+1}$

En effet, en différentiant cette quantité, l'on trouvera la différentielle A.

On peut intégrer toute différentielle binome dans laquelle l'exposant de la quantité hors du signe étant augmenté d'une unité, est divisible

par l'exposant de la quantité sous le signe, & donne un nombre entier positif. Soit la différentielle $a\, x^{mn+n-1}.\, dx.\, (b+gx^n)^p$. Je fais $(b+gx^n)^p = z$, ou $b+gx^n = z^{\frac{1}{p}}$, ou $x^n = \frac{z^{\frac{1}{p}}-b}{g}$; donc $x^{n-1}.\, dx = \frac{1}{n.\, g\, p} . z^{\frac{1}{p}-1} dz$ & $x^{mn} = \left(\frac{z^{\frac{1}{p}}-b}{g^m}\right)^m$; or, $x^{mn+n-1}\, dx = x^{mn} \times x^{n-1}\, dx$; donc la différentielle proposée deviendra (A) $= \frac{a}{npg^{m+1}}.\, z^{\frac{1}{p}}.\, dz.\, (z^{\frac{1}{p}}-b)^m$.

Maintenant si $\frac{mn+n-1+1}{n} = \frac{mn+n}{n} = m+1$ est un nombre entier, m sera un nombre entier, ou 0; si m est $= 0$, la quantité sous le signe m sera $= 1$, & S. $z^{\frac{1}{p}}.\, dz = \frac{z^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}$, étant multipliée par le facteur constant $\frac{a}{npg}$, donnera l'intégrale cherchée exprimée en z, & substituant la valeur de $z = (b+gx^n)^p$, l'on aura l'intégrale exprimée en x. Si $m = 1$, ou 2, ou 3, &c. l'on aura facilement l'intégrale, parce qu'on pourra toujours élever la quantité sous le signe

m, à la puissance m, & en général puisque $m+1$ est le quotient de l'exposant de x hors du signe, en augmentant d'une unité, par l'exposant de x sous le signe, toutes les fois que $m+1$ sera un nombre entier positif, $m+1-1=m$ sera un nombre entier, ou o, & la quantité sous le signe m sera ou $=1$, ou sera réductible à un nombre fini de termes; donc on pourra toujours intégrer toute différentielle binome qui se trouvera dans ce cas. Si $m.n+n-1=n-1$, ou si $m=0$, l'on aura $x^{n-1}dx$, qui sera la différentielle de la quantité sous le signe à un multiplicateur constant près : donc toutes les fois que la quantité hors du signe est la différentielle de la quantité sous le signe, à un multiplicateur constant près, la différentielle binome est intégrable.

Soit la différentielle $cx^3dx.(f^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$; Je vois qu'elle est intégrable, parce qu'en augmentant l'exposant 3 de 1, j'ai 4 qui, divisé par 2, donne un nombre entier positif $=2$. Faisant donc $(f^2+x^2)^{\frac{1}{3}}=z$, $ff+x^2=z^3$, $g=1$, $b=f^2$, $2=n$, $\frac{1}{3}=p$, $c=a$, & substituant ces valeurs dans la transformée.....(A) ci-dessus, l'on a $\frac{3c}{2}.z^3dz\times(z^3-f^2)^1$; car ici $m+1=2$ & $m=1$, & négligeant le multiplicateur constant, il vient $S.(z^6dz-f^2z^3dz)=S.z^6dz-S.f^2z^3dz=\frac{z^7}{7}-\frac{f^2}{4}z^4$. Multipliant

cette quantité par $\frac{3c}{2}$, l'on a $\frac{3c}{14} \cdot z^7 - \frac{3c}{8} f^2 z^4$ $= \frac{3c}{14} (f^2 + x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3cf^2}{8} (f^2 \pm x^2)^{\frac{4}{3}}$, en ſubſtituant la valeur de z.

Il y a des différentielles qui ne paroiſſent pas ſe trouver dans le cas dont on vient de parler, & qui peuvent néanmoins y être ramenées en changeant l'expoſant de la variable ſous le ſigne de poſitif en négatif, ou de négatif en poſitif. Par exemple, la différentielle $dx \cdot (b + xx)^{-\frac{3}{2}} = x^0 \cdot dx \cdot (b + x^2)^{-\frac{3}{2}}$ devient en diviſant par x^2 dans le binome, & multipliant hors du binome par la quantité x^2 élevée à l'expoſant $\frac{-3}{2}$ du ſigne (voyez le calcul des radicaux dans la premiere partie de cet ouvrage.) devient, dis-je, $x^{-3} dx \cdot (1 + \frac{b}{xx})^{-\frac{3}{2}}$ $= x^{-3} \cdot dx \cdot (1 + bx^{-2})^{-\frac{3}{2}}$. Maintenant en augmentant -3 d'une unité, l'on a $-3 + 1 = -2$. Mais en diviſant -2 par -2 le quotient 1 eſt un nombre entier poſitif; donc la différentielle propoſée eſt intégrable.

Si x affectoit les deux termes du binome, il feroit facile de rendre un de ces termes entierement conſtant. Par exemple, ſi l'on avoit $x^3 dx \times (bx + gx^3)^2$, je diviſerois les deux termes du binome par x, & je multiplierois la quan-

tité hors du signe par le quarré de x, parce que x, sous le signe 2, est égale à x^2, & j'aurois $x^5 . dx . (b + gx^2)^2$ qui est intégrable, puisque $\frac{5+1}{2} = 3$.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle est affectée d'un multiplicateur ou d'un diviseur constant, on peut en intégrant négliger le multiplicateur ou le diviseur, pourvu qu'on le remette ensuite dans l'intégrale.

La différentielle $3 . (adx - xdx) . (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ est intégrable par la regle fondamentale, parce que la quantité hors du signe est la différentielle de la quantité sous le signe, en multipliant cette différentielle par $\frac{2}{3}$; donc en augmentant d'une unité l'exposant $\frac{1}{2}$, & divisant par $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, & par $2adx - 2xdx$. (différentielle de la quantité sous le signe), l'on aura l'intégrale cherchée $= (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. En général, quelque soit le polinome sous le signe, on pourra toujours intégrer par la regle fondamentale, toutes les fois que la quantité hors du signe sera la différentielle de la quantité sous le signe, quand même cette différentielle seroit multipliée ou divisée par une quantité constante. Ces principes supposés, appliquons le Calcul Intégral à la Géométrie. Nous commencerons par les Surfaces.

2. PROBLEME. *Trouver la différence des surfaces des courbes, en supposant les ordonnées perpendiculaires aux abcisses.* Soit $AP = x$. $PM = y$, (Fig. 1ere.), $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, le rectangle $PpMR$ est $= ydx$,

& le triangle $M m R = \frac{1}{2} dx . dy$; donc le tropeze $P p M m = y dx + \frac{1}{2} . dx . dy = y dx$: Car $\frac{1}{2} dx . dy$, infiniment petit du ſecond ordre, diſparoit devant $y dx$ infiniment petit du premier ; or le tropeze $P M m p$ eſt l'élément de la ſurface $A m p$; donc $S. y dx$ eſt égal à cette ſurface. Il ne s'agit donc que d'intégrer l'élément $y dx$.; pour cela on ſubſtituera dans cette formule la valeur de y exprimée par une fonction de x, priſe de l'équation de la courbe, comme on va le voir dans les exemples ſuivans.

Si $A M m$ eſt une ligne droite, l'on aura l'élément de l'aire d'un triangle.

3. PROBLEME. *Trouver l'aire d'un triangle* $A B C$ (*Fig.* 2.). Soit $A D = a$ la hauteur du triangle, ſa baſe $B C = b$, l'abciſſe $A P = x$, l'ordonnée $M m$ parallele à la baſe $= y$; en ſuppoſant une autre ordonnée $N n$ infiniment proche l'élément de l'aire ſera $= y dx = m n M N$. en faiſant $P p = dx$, les triangles ſemblables $A B C$, $A M m$ ayant leurs hauteurs proportionnelles à leurs baſes, l'on a $A D = a : B C = b :: A P = x : M m = y = \frac{bx}{a}$;

donc $y dx = \frac{bxdx}{a}$ & $S. y dx = \frac{bx^2}{2a}$.

Si $A P$ devient $= A D$, l'on aura $x = a$, & l'aire du triangle $= \frac{baa}{2a} = \frac{b}{2} a$; c'eſt-à-dire l'aire d'un triangle eſt égal au produit de la moitié de ſa baſe par ſa hauteur, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la Géométrie.

4. PROBLEME. *Trouver la surface d'une Parabole ordinaire* A M. (Fig. 1ere.) Par la nature de la courbe, l'on a $y^2 = px$, $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc $S. y dx = S. p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}. yx$; c'est-à-dire que l'aire d'une demie Parabole A M P est égale aux deux tiers du produit de l'ordonnée & de l'abcisse.

COROLLAIRE. Donc l'espace extérieur BAM $= yx - \frac{2}{3}. y. x = \frac{1}{3} y. x.$

5. PROBLEME. *Trouver l'espace a. g M P, compris entre deux ordonnées paraboliques.* Soit A a $= a$, a g $= b$, a P $= x$, l'élément de cet espace sera $= y dx$; mais à cause de A P $= a + x$, l'on aura $y^2 = p(a+x)$, $y = p^{\frac{1}{2}}. (a+x)^{\frac{1}{2}}$ & $S. y dx = S. p^{\frac{1}{2}} \times (a+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{3}. (a+x)^{\frac{3}{2}}$ (par la regle fondamentale (1)) $= \frac{2}{3}. p^{\frac{1}{2}} (a+x)^{\frac{1}{2}} \times (a+x)$. Nous avons dit, dans la section précédente, qu'il falloit ajoûter une constante à l'intégrale. Si nous faisons cette constante $=$ C, l'on aura $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (a+x)^{\frac{1}{2}} (a+x) + C$ (B) pour l'intégrale complette. Pour déterminer la constante C, je remarque que lorsque $x = 0$, l'espace $agMP$ est $= 0$, & dans ce cas l'intégrale B devient $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + C$ qui doit être $= 0$;

donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}+C=0$, ou $C=0-\frac{2}{3}.p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}$; donc l'aire cherchée est $=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}(a+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}$. En effet $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}.(a+x)^{\frac{3}{2}}$ exprime l'aire entiere A P M, tandis qu'on demande cette aire moins l'aire Aga; or l'aire agA$=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}a=\frac{2}{3}b.a.$, puisqu'en faisant aA$=x$, l'on auroit $ag=b=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$.

En général pour trouver la constante C qu'on doit ajoûter à l'intégrale, on fera $x=0$; si alors par la nature de la question l'intégrale doit être $=0$, & qu'elle soit effectivement $=0$, l'on aura $C=0$; ainsi dans le troisieme Problême l'aire parabolique a été trouvé $=\frac{2}{3}yx$, qui en faisant $x=0$, devient $=0$; donc $C=0$.

Si l'intégrale doit être $=$B. lorsque $x=0$, la constante qu'on doit ajoûter, doit rendre cette intégrale $=$B; c'est-à-dire que si l'intégrale est B $+$ D, l'on doit avoir B$+$D$+$C $=$ B, ou D$+$C$=0$, ou C$=-$D. Si l'on avoit B$-$D pour intégrale, l'on auroit B $-$ D $+$ C$=$B, ou $-$ D $+$ C$=0$, ou C$=+$D; *donc la constante C qu'on doit ajoûter, est égale à la différence de l'intégrale que l'on a dans la supposition de $x=0$, avec celle qu'on doit avoir dans cette même supposition, en prenant cette différence avec un signe contraire.*

Dans l'exemple ci-dessus, lorsque $x = 0$, l'on doit avoir l'intégrale $B = 0$, tandis que l'on a $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$; donc $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$.

Si dans la supposition de $x = b$, l'intégrale devoit être $= B$, & qu'elle fût $= B \pm D$, l'on auroit $B \pm D + C = B$, ou $C = \mp D$. Ainsi la constante C se trouve aussi en prenant avec un signe contraire la différence de l'intégrale que l'on a en supposant $x = b$ avec celle que l'on doit avoir dans la même supposition; lorsque C devra être $= 0$, on n'en fera pas mention.

6. Probleme. *Quarrer* * *toutes les courbes dont l'équation est* $y a^{m-1} = x^m$, *& qui peut représenter les paraboles & les hyperboles de tous les genres, entre leurs assymptotes.* L'on a $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$, $S. y d x = S. \frac{x^m}{a^{m-1}} . d x = \frac{x^{m+1}}{(m+1) a^{m-1}}$. donc s'il s'agit des paraboles, & que l'espace commence à l'origine des x, en faisant $x = 0$, l'on a $\frac{x^{m+1}}{(m+1) a^{m-1}} = 0$, ce qui doit être; dans ce cas la constante C est $= 0$. Si m est négatif, ce qui arrive dans les hyper-

* Quarrer & trouver la surface sont ici des termes synonymes.

boles de tous les genres *, l'on a $\frac{x^{-m+1}}{(m+1)\,a^{-m-1}}$ $= \frac{a^{m+1}.\,x^{-m+1}}{-m+1}$. Si AP $= x = 0$ (*Fig.* 4.), en supposant $m < 1$, l'aire sera $= 0$. Si l'aire commence au point P, auquel on suppose $x =$ AP $= b$, l'aire PMSR doit s'évanouir, lorsque $x = b$; donc alors $\frac{a^{m+1}\,b^{-m+1}}{1-m} + C$ $= 0$, ou C $= \frac{-a^{m+1}\,b^{-m+1}}{1-m}$, & l'aire est alors $= \frac{a^{m+1}.\,x^{-m+1}}{1-m} - \frac{a^{m+1}\,b^{-m+1}}{1-m}$.

On peut remarquer que dans cette hyperbole, l'espace infiniment long ABFMP. situé du côté de l'assymptote AB est fini, & l'espace situé du côté de R est infini. Car en supposant $x = b$, cet espace est $= \frac{a^{m+1}.\,b^{c}}{c}$ (en faisant $1 - m = c$) quantité finie ; mais en supposant $x = \infty$, cet espace est $= \frac{a^{m+1}\,\infty^{c}}{c}$ cela vient de ce que la courbe s'approche plus

* Car alors on a $y.\,a^{-m-1} = x^{-m}$, ou $\frac{y}{a^{m+1}}$ $= \frac{1}{x^m}$ ou $y.\,x^m = a^{m+1}$ équation qui peut représenter toutes les hyperboles entre leurs assymptotes.

rapidement de l'aſſymptote A B que de l'aſſymptote A R : pour le faire concevoir, ſupoſons $a = 1$ & $m = -\frac{1}{3}$, $m + 1$ ſera $= \frac{2}{3}$. & l'équation ſera $y . 1 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; donc les ordonnées P M = A D ſont en raiſon inverſe des racines cubes des x, ou de $\sqrt[3]{x}$ donc les D M = A P qui déſignent les ordonnées par rapport à l'aſſymptote A B, ſont en raiſon inverſe des cubes des abciſſes A D $= y$. Au contraire s'il s'agit de l'aſſymptote A R, l'on a P M $= y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; la courbe s'approche donc plus rapidement d'une des aſſymptotes que de l'autre, & cela arrive auſſi dans toutes les hyperboles, excepté l'hyperbole ordinaire.

Si $m > 1$; on pourra exprimer l'intégrale en ajoûtant une conſtante de cette maniere ; $C - \frac{a^{m+1}}{(m-1).x^{m-1}}$. Si cette intégrale doit s'évanouir en faiſant $x = 0$, l'on aura $C = \frac{a^{m+1}}{(m-1).0^{m-1}} = \infty$. Cela arrive ainſi parce que l'eſpace du côté de B eſt infini. Pour que l'intégration ne ſoit point fruſtrée, on ſupoſera une abciſſe A P ſi petite que l'on voudra $= b$; & c'eſt de l'ordonnée correſpondante P M, qu'il faut commencer à compter l'eſpace P M S R ; dans ce cas cet eſpace ſera

$= o$, lorſque $x = b$; donc $C = \frac{a^{m+1}}{(m-1).b^{m-1}}$,

& l'aire PMSR $= \frac{a^{m+1}}{(m-1)b^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$.

Si $x = \infty$, le dernier terme diſparoit, & l'on a l'eſpace infiniment long PMSR $= \frac{a^{m+1}}{(m-1).b^{m-1}}$; & parce que en prenant les abciſſes ſur une des aſſymptotes, l'on a dans toutes les hyperboles, excepté les vulgaires ; $m < 1$, & en les prenant ſur l'autre, l'on a $m > 1$, un des eſpaces aſſymptotiques ſera fini & l'autre infini, comme on l'a déjà dit.

7. PROBLEME. *Quarrer l'hyperbole équilatere entre ſes aſſymptotes.* Quoiqu'on ait déjà réſolu ce probleme, en réſolvant le précédent, nous croyons devoir le réſoudre d'une autre maniere ; ſoit $yx = aa$ l'équation de la courbe, l'on aura, en faiſant $a = 1$, $yx = 1$, $y = \frac{1}{x}$, $S.y\,dx = S.\frac{dx}{x} = L.x$, & ajoûtant une conſtante, l'on a $L.x + C$. pour l'aire BARSF qui doit être $= o$, lorſque $x = o$, donc $C + L\cdot o = o$, ou $C = -L\cdot o$; donc l'aire cherchée $= L\cdot x - L\cdot o = L\cdot\frac{x}{o}$ (car par la nature des logarithmes, le logarithme du quotient eſt égal au logarithme du dividende moins celui du diviſeur) ; ainſi en faiſant $x = b =$ AP, l'eſpace APMFB ſera infini, en conſidérant o comme une quantité

infiniment

infiniment petite & supposant b finie quoique extremement petite.

On peut voir par-là que les logarithmes hyperboliques tirent leur origine d'une hyperbole équilatere dans laquelle la puissance $a\,a$ seroit $=1$.

8. PROBLEME. *Trouver l'aire* PMRS *comprise entre deux ordonnées assymptotiques* PM, RS. Soit AP $= b$, PR $= x$, RS $= y$, par la nature de l'hyperbole équilatere, en faisant $aa = 1$, l'on a $y \times (b + x) = a^2 = 1$, $y = \frac{aa}{b+x}$, $S.y\,dx = S.\frac{aa\,dx}{b+x} = aa.$ $L.(b+x) = L.(b+x) + C$, en ajoûtant une constante, & parce que en faisant $x = 0$, l'aire cherchée doit être $= 0$, l'on a $L.b + C = 0$, $C = -L.b$; donc l'aire cherchée est $= L.(b+x) - L.b$. Si $x = b$, l'on aura l'aire cherchée $= L.2b - L.b = L\frac{2b}{b} = L.2$. Si $x = 3\,b$, l'on a $L.(b+x) = L.4b - \log.b$, & l'aire PMRS $= L.\frac{4b}{b}$, & en supposant successivement $x = b, 3b, 7b$, &c., ou les abcisses AP $= b$, AR $= 2b$, A$r = 4b$, A$t = 8b$, &c. En progression géométrique, les aires PMSR, PM$\int r$, &c. ou $L.2$, $L.4$, $L.8$, &c. seront en progression arithmétique *. Et si l'on fait $b = 1$,

* Par la nature des logarithmes, les quantités en progression géométrique, ont leurs logarithmes en progression arithmétique.

l'on aura la progression L . 1, L . 4, L . 8, &c. = 0, L . 2, L . 4, L . 8, &c.; car L . 1 = 0; c'est-à-dire que le logarithme de A P est = 0, ou, ce qui revient au même, que les logarithmes hyperboliques commencent au point P, auquel $x = 0$.

Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, le secteur A M S est égal à l'aire P M R S; donc on peut prendre les secteurs M A S, M A $\int$, &c. pour les aires correspondantes ou pour les logarithmes des abcisses A R, A r, &c. De plus, selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, (voyez les progressions géométriques) si plusieurs quantités A P, A R, &c. ou 1, 2, 4, 8, &c. sont en progression géométrique; leurs différences P R, R r, $r\,t$, &c. formeront une progression géométrique ∺ 1 : 2 : 4 : 8, &c. & les différences P M R S, R S $\int r$, &c. des aires, ou les aires correspondantes seront égales; car $L\,2 - 0 = L\,2 = L\,4 - L\,2 = L\,\frac{4}{2} = L\,2$, $L\,8 - L\,4 = L\,\frac{8}{4} = L\,2$, &c.; donc aussi les secteurs correspondans M A S, S A $\int$, &c. seront égaux entr'eux; mais l'aire P M R S est finie; donc puisqu'on peut prendre une infinité de lignes P R, R r, &c. en progression géométrique, il pourra y avoir une infinité d'aires finies assymptotiques; donc l'aire entiere P M $u\,m$ à l'infini sera infinie.

REMARQUE. On peut intégrer $\frac{a\,a\,d\,x}{b + x} = a\,a \,.\, (b + x)^{-1} \,.\, d\,x$, en résolvant $(b + x)^{-1}$.

en une série par la formule de Newton, en faisant $m = -1$, & l'on aura $\frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{b^2} + \frac{aax^2dx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$, &c. dont l'intégrale $= \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{2b^2} + \frac{aax^3}{3b^3} -$ &c.

La solution du Probleme précédent peut servir à faire trouver une logarithmique dont la soustangente soit égale à une ligne donnée b.

9. PROBLEME. *Décrire la logarithmique dont la sous-tangente* $= b$. (Fig. 5.) Je cherche l'aire PMRS, en supposant $x = b = 1$ (Fig. 4.), ou je cherche le logarithme hyperbolique de 2, par la méthode du N°. 24. de la section précédente. Je multiplie cette aire qu'on peut du moins avoir aussi approchée que l'on veut par aa, & je divise le produit par b. De sorte que si cette aire est $= c$, lon aura $\frac{aac}{b} = \frac{c}{b}$, en faisant $a = 1$. Maintenant je fais AP (Fig. 4.) $= b$, & ayant tiré une ligne indéfinie AR (Fig. 5.), sur cette ligne, j'éleve perpendiculairement AM $= b$. Je prends les abcisses AR, Ar, &c. en progression arithmétique, de maniere que, l'origine des abcisses étant en A, l'on ait l'abcisse AR égale à l'aire divisée par b, ou $x =$

$Rr = AR = \frac{c}{b}$, &c. * ou $Ar = \frac{2c}{b}$, &c. & les ordonnées $AM = b$, $RS = 2b$, $rf = 4b$, &c. en progreſſion géométrique ou égales aux abciſſes AP, AR, &c. (Fig. 4.). Cela poſé, il eſt viſible que les abciſſes AR, Ar, (Fig. 5.) ſont les logarithmes des ordonnées correſpondantes, & que le logarithme de l'ordonnée AM $= b$ eſt $= 0$, parce que l'origine des x eſt au point A. D'autre côté, les logarithmes des ordonnées am plus petites que b, qu'on peut ſuppoſer $= 1$, (car l'unité eſt arbitraire) ſont négatifs; c'eſt-à-dire que les logarithmes $x = Aa$, (Fig. 5.) pris à la gauche de AM, ſont négatifs. De plus, en ſuppoſant la ſous-tangente $= b$, l'on a, ſelon ce qu'on a vu ſection précédente (22), l'intégrale $S. \frac{dy}{y}$ égale au logarithme de y, diviſé par la ſous-tangente de la logarithmique dans laquelle on prend ce logarithme. En faiſant ce logarithme $= x$, l'on aura $\frac{x}{b} = S. \frac{dy}{y}$, ou $x = bS. \frac{dy}{y}$; mais (Fig. 5.) $RS = AR$ (dans la

* En exprimant l'aire c par un nombre, on concevra facilement comment l'on peut avoir $x = \frac{c}{b}$ & même $x = b$.

Fig. 4.) $= b + x$ & $d L y = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{b + x}$; donc les x (Fig. 5.) font égaux aux produits de b par les aires hyperboliques $c =$ S. $\frac{dx}{b+x}$ (en supposant $a = 1$) multipliées par b; donc les $\frac{x}{b}$ sont égales à ces aires, ou sont les logarithmes S. $\frac{dy}{y}$ des ordonnées correspondantes; donc parce qu'on a dit ci-dessus (section précédente 22.) b est la sous-tangente de la logarithmique dont on vient de parler.

10. PROBLEME. *Quarrer la logarithmique de la Figure (5).* La sous-tangente de la logarithmique étant constante, l'on a $\frac{y dx}{dy} = b$; donc $y dx = b dy$, $S y dx = b S dy = b y$; donc en faisant PN $= y$, l'espace infiniment long PNma sera égal au rectangle de PN par la sous-tangente b. Par la même raison, en supposant RS $= z$, l'espace infiniment long SmRa sera $= b \cdot z$; donc l'espace SRPN $= by - bz = b \cdot (y - z)$; c'est-à-dire l'espace logarithmique compris entre deux ordonnées, est égal au produit de la sous-tangente par la différence des ordonnées.

11. PROBLEME. *Quarrer la courbe dont l'équation est* $y = a + bx + Cx^2 + fx^5$. L'on aura S. $y dx$ $=$ S. $(a dx + bx dx + Cx^2 dx + fx^5 dx)$ $= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{fx^6}{6}$.

12. PROBLEME. *Quarrer la courbe de l'équation* $y = a + bx^m + cx^n + Dx^f$, m, n, f, *étant des nombres positifs*. L'on aura $S. y\,dx = S. (a\,dx + bx^m\,dx + cx^n\,dx + Dx^f\,dx)$ $= ax + \frac{bx^{m+1}}{m+1} + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \frac{Dx^{f+1}}{f+1}$.

13. PROBLEME. *Quarrer la tractrice*. Si l'on conçoit que l'extrémité T d'un fil, se meut le long d'une ligne infinie BT, (Fig. 6.) tandis que son extrémité M traîne un corps M, ce corps décrira sur un plan horisontal la courbe AM qu'on appelle tractrice. Pour cette raison cette courbe aura deux branches, car le point T peut se mouvoir également de B vers T, ou de B vers D. De plus, le fil MT que je suppose $= a$, sera partout une tangente de la courbe ; ainsi la tangente de cette courbe est constante & $= a$, comme on l'a dit dans la section précédente (34). Il est visible que la plus grande ordonnée AB est $=$ MT $= a$. Qu'on mene les lignes infiniment proches LP, Np, perpendiculaires à la ligne DT, & faisons BP $=$ FM $= y$, LM $=$ AF $= x$, & supposant tirées les lignes que représente la figure, l'on aura R$m = dy$, MR $= dx$, PM $= a - x$, $\overline{MT}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{PT}^2$, $= aa - (a-x)^2 = 2ax - xx$, ou PT $= \sqrt{(2ax - xx)}$; mais à cause des triangles semblables PMT, MRm, l'on a $dx : dy :: a - x : \sqrt{(2a - xx)}$; ou $dy \cdot (a - x) = dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)}$. Si du centre B avec le rayon a l'on décrit un quart de cercle AD, l'élément Ffnu de

ce quart de cercle, sera $= \int F . \int u =$ $dx \sqrt{(2ax - xx)}$, * tandis que l'élément P p R m de la tractrice est égal à $dy . (a - x)$; donc en faisant $x = a$, l'espace infiniment long B T m A, compris entre la tractrice & son assymptote B T est égal à un quart de cercle dont le rayon est égal à la tangente de la tractrice.

COROLLAIRE. Si l'on fait PM $= y$, BP $= x$, l'on aura $\overline{MT}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{PT}^2 = aa - y^2$, PT $= \sqrt{(aa - yy)}$, Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. mais à cause des triangles semblables M m R, M P T, l'on a M P (y) : P T $= \sqrt{(aa - yy)}$: : $- dy$ ** : $dx = \frac{- dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$ qui est l'équation de la courbe telle qu'on l'a donnée dans la section précédente (34.)

14. PROBLEME. *Quarrer le cercle.* Soit ADC un quart de cercle, (Fig. 3.) dont le diametre $= a$, l'abcisse AP $= x$, & l'ordonnée PM $= y$. Par la nature du cercle, l'on a $y = \sqrt{(ax - xx)}$, S. $y dx =$ S. $dx . \sqrt{(ax - xx)} =$ S. dx. $\sqrt{x} . \sqrt{(a - x)}$. Résolvant $\sqrt{(a - x)} = (a - x)^{\frac{1}{2}}$

* car l'ordonnée de ce quart de cercle est $= \sqrt{(2ax - xx)}$.

** dy a le signe $-$ parce y diminue lorsque x augmente. Si l'on fait mouvoir le point T vers la gauche en allant de B vers D, on décrira une autre branche égale & semblable à la premiere. Si, parce que P T est située à la gauche de P M, on vouloit prendre le radical avec le signe $-$, le second membre de l'équation auroit le signe $+$.

en une série par le binome de Newton, & multipliant tous les termes de la série par $x^{\frac{1}{2}} dx$, l'on aura $dx . \sqrt{(ax - xx)} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} -$, &c. $= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{1.2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{1.2.4a^{\frac{3}{2}}} -$ &c. dont l'intégrale $=$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{7}{2}}}{4.7.a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3x^{\frac{9}{2}}}{4.6.9a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^{\frac{11}{2}}}{4.6.8.11a^{\frac{7}{2}}},$$

&c. Si l'on fait $x = \frac{1}{2} a$, l'on aura le quart de cercle A D C, dont le quadruple donnera le cercle entier; si le diametre étoit $2a$, l'on auroit S $y\,dx =$ S. $dx \sqrt{(2ax - xx)}$.

AUTRE MANIERE. Si l'on fait le rayon $= a$, & que l'on compte les abcisses C P du centre, l'on aura $y = \sqrt{(aa - xx)}$ & S. $y\,dx =$ S. $dx \sqrt{(aa - xx)}$ $=$ C D P M ; résolvant en série $\sqrt{(aa - xx)}$. multipliant par dx, & intégrant, il vient S. dx .

$$\sqrt{(aa - xx)} = ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} - ; \text{ \&c.}$$

Si l'on fait C P $=$ C A $= a$, l'on aura le quart de cercle C D A $= aa - \frac{aa}{2.3} - \frac{1.a^2}{2.4.5}$, &c.

AUTREMENT. Soit la tangente $At = x$; ayant mené les sécantes Ct, CT infiniment proches, & du centre C décrit l'arc ts, qu'on pourra regarder comme une ligne droite perpendiculaire sur CT, l'on aura $tT = dx$ & les triangles Tts, CTA, ou CtA (car les angles CTA, CtA peuvent être regardés comme égaux) seront semblables, aussi bien que les triangles Cts, Cri; donc en faisant $AC = a$, l'on aura $Ct = \sqrt{(aa + xx)} : CA = a :: Tt = dx : ts = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$: l'on aura aussi $Ct : Ci ::$ $ts : ri$, ou $\sqrt{(a^2 + x^2)} : a :: \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$: $ri = \frac{a^2dx}{aa + xx} = a^2dx.(aa + xx)^{-1}$;

Multipliant cette quantité par $\frac{Cr}{2} = \frac{a}{2}$, l'on aura le secteur élémentaire $Cir = \frac{dx}{2}a^3 \times (aa + xx)^{-1}$. Résolvant en série $(aa + xx)^{-1}$, multipliant tous les termes par $\frac{dx}{2}a^3$, on trouve le secteur $CAr = S.\frac{a^3dx}{2(aa + xx)} = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10.a^3} - \frac{x^7}{14.a^5}$, &c. Si l'on fait $AT = a$; c'est-à-dire, si l'arc Ar est

de 45°. *, l'on aura le secteur C A $r = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14} + \frac{aa}{18}$, &c ; & en multipliant tous les termes par 8, l'on aura l'aire du cercle entier.

15. PROBLEME. *Quarrer la cicloïde.* (Fig. 7). Soit $Pn = y$, l'on aura $ir = ns = dy$, & faisant le diametre D C du cercle générateur $= a$, $DP = x$, l'on aura $PM = \sqrt{(ax - xx)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, (section précédente 13), la corde D M est parallele à la tangente T n de la cicloïde; donc les triangles D M P, nis ** sont semblables & donnent $DP : PM :: nr = Pp = dx : ri = ns$, ou $x : \sqrt{(ax - xx)} :: dx : ns = \frac{dx\sqrt{(ax - xx)}}{x}$. Si l'on multiplie ns par $Ln = x$, l'on aura l'élément $Lnsf$ de l'espace extérieur A F D $= dx\sqrt{(ax - xx)}$; or cet élément est celui d'un demi-cercle dont le diametre $= a$; donc l'espace extérieur A F D est égal au demi-cercle générateur ; mais l'espace entier A F D C est égal au produit de A C par D C, ou de la demi-circonférence du cercle générateur par son diametre, ou est $= a . b$, en faisant la demi-circonférence du cercle générateur $= b$, tandis que le demi-cercle générateur est $= \frac{a . b}{4}$;

* La tangente de 45°. est égale au rayon, comme on l'a dit dans la Trigonométrie.

** On peut regarder l'arc ni comme le prolongement de la tangente T n.

donc l'espace cicloïdal A D C $= \frac{3}{4} . a . b$; c'est-à-dire, la demi cicloïde A D C est triple du demi-cercle générateur, & la cicloïde entiere est triple du cercle générateur *.

16. PROBLEME. *Quarrer la Cissoïde.* (Fig. 8). Par la nature de cette courbe en faisant le diametre du cercle générateur $= 2a$, l'on a $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ $= \frac{x^3}{1 - x}$, en supposant $2a = 1$, $y = x^{\frac{3}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, S. $y\,dx =$ S. $x^{\frac{3}{2}} \times (1 - x)^{-\frac{1}{2}} dx$. Élevant $1 - x$ à la puissance $- \frac{1}{2}$; multipliant ensuite tous les termes de la série résultante par $x^{\frac{3}{2}} dx$, l'on aura S. $\frac{dx . x^{\frac{3}{2}}}{(1 - x)^{\frac{1}{2}}} =$ $x^{\frac{1}{2}} (\frac{2}{5} x^2 + \frac{1}{7} x^3 + \frac{1.3}{4.9} x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11} . x^5$, &c.

* Si l'on compte les ordonnées depuis le diametre du cercle générateur, les ordonnées $Ps = DL$ étant $= y$, & $ns = dy$, on aura $Ln = x$ & $dy = \frac{dx \sqrt{(ax - xx)}}{x}$, ou $dx = \frac{dz \sqrt{(2az - zz)}}{z}$, en changeant y en x, x en z & faisant de plus le diametre du cercle générateur $= 2a$. Nous ferons usage de cette équation au N°. 304. de la Section troisieme.

AUTREMENT. Supposons $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, l'on aura $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, ou $ay^2 - y^2 . x = x^3$, $2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$, $2dy . (a - x) - ydx = \frac{3xxdx}{y}$; mais en supposant $PN = u$, l'on a par la nature de la courbe $PM : PA :: PA : PN = u = \frac{x^2}{y}$, & supposant de plus $PB = a - x = z$, on aura $2 . zdy - ydx = 3udx$, & $2 S. zdy - S. ydx = 3 S. udx$. Mais $udx = PN . Pp$, est l'élément du demi-cercle ANB, $zdy = BP . dy = Bp . dy = mR . fm$, est l'élément de l'aire $AmBR$, & $ydx = PM . Pp$, est l'élément de l'aire $AMDB$, & quand $S. zdy$ exprime l'aire entiere $ABRm$, comprise entre l'assimptote & la branche Am, $S. ydx$ exprime aussi cette aire, & alors $S. zdy = S. ydx$; donc alors $2 S. zdy - S. ydx = 3 S. udx$, devient $S. zdy = 3 S. udx$. Mais $S. udx$ exprime le demi-cercle ANB; donc l'espace entier $AmBR$ est triple du demi-cercle générateur, & l'espace entier $SAmRF$ est triple du cercle générateur.

17. PROBLEME. *Quarrer la courbe exponentielle dont l'équation est $y = x^x$.* Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, (courbes algébriques 47.) si le logarithme hyperbolique d'un nombre est $= p$, ce nombre sera $= 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4} + \frac{p^5}{2.3.4.5} +$ &c.

Le logarithme hyperbolique de x^x étant $= x\,L\,x = L.y$; je substitue $x\,L\,x$ au lieu de p dans cette série, pour avoir $1 + x\,L.x + \frac{x^2(L.x)^2}{2} + \frac{x^3(L.x)^3}{2.3} + \&c. = x^x = y$, $S\,y\,dx = S\,x^x\,dx = S.\,(dx + x\,L.x\,.\,dx + \frac{x^2\,\overline{L.x}^2\,dx}{2} + \frac{x^3\,\overline{L.x}^3\,dx}{2.3} + \&c.)$. On prendra les intégrales de chaque terme, en négligeant les diviseurs de ceux qui en ont en cette maniere.

$$S.\,dx = x$$

$$S.\,x.L.x.\,dx = \frac{1}{2}x^2\,L.x - \frac{1}{2^2}x^2;$$

$$S.\,x^2\,\overline{L.x}^2\,dx = \frac{1}{3}.x^3\overline{Lx}^2 - \frac{2}{3^2}\,x^3L.x + \frac{2}{3^3}x^3.$$

$$S.\,x.^3\,\overline{L.x}^3\,dx = \frac{1}{4}x.^4\overline{L.x}^3 - \frac{3}{4^2}x^4\overline{L.x}^2 + \frac{2.3.x^4L.x}{4^3} - \frac{2.3.x^4}{4^4}$$

$$S.\,x^4\,\overline{L.x}^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\,\overline{L.x}^4 - \frac{4}{5^2}.x^5\overline{L.x}^3 + \frac{3.4.x^5\overline{L.x}^2}{5^3} - \frac{2.3.4.x^5L.x}{5^4} + \frac{2.3.4x^5}{5^5}$$

La loi de la progression est facile à concevoir, & l'on peut facilement l'appliquer aux autres termes. Si l'on différencie une de ces intégrales, l'on trouvera la différentielle correspondante : Par exemple, en différentiant $\frac{1}{2}x^2$ L. $x - \frac{1}{2^2}x^2$, l'on aura, en faisant varier successivement x & L. x, $\frac{2}{2}xdx$ L. $x + \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} - \frac{2xdx}{2^2} = x$ L. $x\,dx + \frac{1}{2}x\,dx - \frac{1}{2}x\,dx = x$ L. $x\,dx$ *, & ainsi des autres. En substituant les valeurs des intégrales, & ne négligeant pas les diviseurs qu'ont les termes avant l'intégration, l'on aura :

---

* Car $2^2 = 4$ & $\frac{2xdx}{2^2} = \frac{2}{4}xdx = \frac{1}{2}xdx$.

$$S.y\,dx = S x^x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{1}{2}x^2\,L.x + \frac{1}{2.3}x^3\,\overline{L.x}^{2} + \frac{1}{2.3.4}x^4\,\overline{L.x}^{3} + \frac{1.x^5\,\overline{L.x}^{4}}{2.3.4.5},\ \&c. \\ -\frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1}{3^2}x^3\,L.x - \frac{1}{2.4^2}x^4\,\overline{L.x}^{2} - \frac{1}{2.3.5^2}x^5\,\overline{L.x}^{3},\ \&c. \\ \qquad + \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{4^3}x^4\,L.x + \frac{1}{2.5^3}x^5\,\overline{L.x}^{2},\ \&c. \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4^4}x^4 - \frac{1}{5^4}x^5\,L.x,\ \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{5^5}x^5,\ \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \&c. \end{array} \right.$$

Cette formule repréfente l'aire cherchée. Si l'on fait $x = 1$, alors $L. x = 0$, & il ne refte que les termes qui, dans les féries horifontales, occupent le premier rang; donc l'aire de la courbe comprife entre deux ordonnées, dont l'une répond à $x = 0$, & l'autre à $x = 1$, fera $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^7}$, &c. Cette férie eft fi convergente que le dixième terme $\frac{1}{10^{10}}$ eft feulement $= \frac{1}{10,000,000,000}$.

18. REMARQUE. L'on peut voir par-là que $S. x^m (L. x)^m dx = (\frac{1}{m+1} x^{m+1} L. x)^m - \frac{m}{(m+1)^2} x^{m+1} (L. x)^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{(m+1)^3} \times x^{m+1} (L. x)^{m-2} - \frac{m.(m-1).(m-2)}{(m+1)^4} \times x^{m+1} (L. x)^{m-3} + \frac{m.(m-1).m.(m-2).(m-3)}{(m+1)^5} \times x^{m+1} (L. x)^{m-4} +$ &c. La férie finit au terme auquel l'expofant de $L. x = 0$; car les termes fuivans devant être multipliés par cet expofant, feront tous $= 0$. Pour fe convaincre que c'eft-là l'intégrale de $x^m L. x^m dx$, l'on n'a qu'à la comparer avec la cinquieme ci-deffus, en faifant $m = 4$. Si $m = 1$, l'intégrale fera $= \frac{1}{2}. x^2 . (L. x) - \frac{1}{4} x^2$, l'intégrale

l'intégrale S. $\frac{dx}{x.(L.x)^m}$ eſt $= \frac{1}{1-m}$ L. x^{1-m}. Car en différentiant cette derniere quantité & ſuppoſant L. $x = z$, l'on aura $\frac{1}{1-m} \times (1-m) z^{1-m-1} dz$ $= z^{-m} dz = \frac{dx}{x(L.x)^m}$, puiſque $dz = d$ L. x $= \frac{dx}{x}$. Si $m = -1$, cette intégrale ſera $\frac{1}{2}(L.x)^2$; on pourra donc employer dans ce cas cette formule, au lieu de la ſérie précédente dont tous les termes deviennent infinis lorſque $m + 1 = 0$. Enfin ſi m eſt négative ou fractionnaire, l'on n'aura S. x^n (L. x $)^m dx$ que par une ſérie infinie, excepté le cas dans lequel $m = -1$.

19. PROBLEME. *Quarrer l'ellipſe.* L'équation à l'ellipſe en faiſant le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, ſera $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, en comptant les abſciſſes C P (Fig. 9.) depuis le centre, & faiſant P M $= y$; donc l'élement de l'eſpace CDMP eſt $= y\,dx = \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa-xx)}$, & S. $y\,dx = \frac{b}{a}$. S. $dx \sqrt{(aa - xx)}$. Or S. $dx \sqrt{(aa - xx)}$ eſt égale à l'aire C F m P qui appartient au quart de cercle C F A, dont le rayon $= a$; donc l'aire de l'ellipſe eſt à celle d'un cercle décrit ſur ſon grand axe pris pour diamettre, comme $\frac{b}{a}$ S. $dx \sqrt{(aa - xx)}$: S. dx. $\sqrt{(aa - xx)} :: \frac{b}{a} : 1 :: b : a$; c'eſt-à-dire, comme le petit demi-axe eſt au demi-grand axe.

Si l'on compte les abſciſſes du ſommet A, l'aire AMP ſera $= \frac{b}{a} S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$; or $S. dx. \sqrt{(2ax - xx)}$ eſt égale au demi ſegment circulaire A P m; donc en intégrant $dx \sqrt{(2ax - xx)}$, l'on aura par les ſéries ce demi-ſegment circulaire qui deviendra égal au demi-cercle en ſuppoſant dans l'intégrale $x = 2a$, & multipliant cette intégrale par $\frac{b}{a}$, l'on aura l'aire d'une demi-ellipſe; or on peut intégrer $dx \sqrt{(2ax - xx)} = dx . x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2a - x)}$, en réduiſant $\sqrt{(2a - x)} = (2a - x)^{\frac{1}{2}}$, en une ſérie infinie par la formule $(a + b)^m$, en ſubſtituant $2a$ au lieu de a, ou ſi l'on veut en ſubſtituant c au lieu de a, & $-x$ au lieu de b, multipliant tous les termes par $dx.x^{\frac{1}{2}}$ & intégrant.

REMARQUE. Si l'on décrit un cercle d'un rayon $= \sqrt{(a . b)}$, ou d'un rayon moyen proportionnel géométrique entre le demi-grand axe & le demi-petit axe, ce cercle ſera au cercle dont le rayon $= a$, comme $ab : aa$ (par ce que les cercles ſont dans les rapports des quarrés des rayons) $:: b : a$.

Mais on vient de voir que l'ellipſe étoit au cercle décrit ſur ſon grand axe, comme $b : a$; donc en faiſant $=$ S, l'aire de l'ellipſe, B étant l'aire du cercle dont le rayon $= \sqrt{ab}$, A, l'aire du ce rcle dont le rayon $= a$, l'on aura S : A :: $b : a$ & B : A :: $b : a$; donc S : A :: B : A; ou, *alternando*, S : B :: A : A. Donc S $=$ B; c'eſt-à-dire, que l'aire d'une ellipſe eſt égale à celle d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre le demi-petit axe & le demi-grand axe.

Si l'on vouloit quarrer l'ellipſe par le moyen de

l'élément du secteur CDi; après avoir mené la tangente BT, l'ordonnée IH, & décrit du centre C les arcs infiniment petits fR, ft, l'on feroit $CH = x$, $Hi = y$; donc $Ci = \sqrt{(yy + xx)} = Cf$, (car fi est infiniment petite); mais à cause des triangles semblables CHi, CBT, l'on a $x : y :: a : BT = \frac{ay}{x}$, & $x : a :: Ci = \sqrt{(yy + xx)} : CT = Ct$* $= \frac{a\sqrt{(yy + xx)}}{x}$.

Mais l'abscisse x croissant $BT = \frac{ay}{x}$ diminue, aussi bien que y; donc la différentielle Tt de BT sera $= \frac{-axdy + aydx}{xx}$; mais à cause des triangles semblables Tft, TBC, l'on a $CT : CB :: Tt : ft$, ou $\frac{a\sqrt{(yy + xx)}}{x} : a :: \frac{-axdy + aydx}{xx} : ft = \frac{-axdy + aydx}{x\sqrt{(yy + xx)}}$; mais les secteurs semblables Ctf, CRf** donnent $Ct : ft :: Cf : fR$, ou $\frac{a\sqrt{(yy + xx)}}{x} : \frac{-axdy + aydx}{x\sqrt{(yy + xx)}} :: \sqrt{(yy + xx)} : fR = \frac{-xdy + ydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$.

* Ct est censée égale à CT, les points T & t étant infiniment proches.

** Le secteurs semblables sont ceux dont les arcs mesurent des angles égaux.

Multipliant fR par $\frac{Cf}{2}$ l'on aura le secteur élémentaire $fCR = \frac{-x\,dy + y\,dx}{2}$. Mais par la nature de l'ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, $dy = \frac{-b\,x\,dx}{a\sqrt{(aa - xx)}}$; donc en substituant ces valeurs, l'on aura le secteur $CfR = \frac{b\,x^2\,dx}{2a\sqrt{(aa - xx)}} + \frac{b\,dx}{2a} \times \sqrt{(aa - xx)} =$ (en réduisant au même dénominateur) $\frac{bx^2dx + aabdx - bxxdx}{2a.\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{a\,b\,dx}{2\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{ab}{2}\,dx.(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Résolvant $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ en série, multipliant ensuite tous les termes de la série par $\frac{a.b}{2}\,dx$, & intégrant, l'on aura $S.\frac{a\,b\,dx}{2.\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80.a^4} + \frac{5bx^7}{224.a^6} +$ &c. Si l'on suppose $x = a$, l'on aura le quart de l'ellipse CDB $= \frac{ba}{2} + \frac{ba}{12} + \frac{3ba}{80} + \frac{5ba}{224}$, &c. dont le quadruple donnera l'aire entiere de l'ellipse.

20. PROBLÊME. *Soit supposée la circonférence* AHB (Fig. 10.) *d'un quart de cercle étendue*

en une ligne droite a b, dans laquelle en supposant les abscisses a h égales aux arcs A H, *les ordonnées correspondantes h m soient égales aux sinus* M H *de ces arcs, on demande la surface a b c, de la courbe a m c, qu'on appelle courbe de sinus.* Soit le rayon C A $= a$, l'arc A H $= ah = x$, le sinus M H de cet arc $= hm = y$; ayant mené les lignes H P, I D perpendiculaires sur C B & tiré les rayons C H, C I, l'on aura $\overline{HP}^2 = aa - y^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{HM}^2$; & $HP = \sqrt{(aa - yy)}$, & sa différentielle H o, en supposant l'arc H I infiniment petit, sera $= \frac{ydy}{\sqrt{(aa-yy)}}$, qu'on prend avec un signe contraire, parce que l'arc croissant aussi bien que son sinus, H P diminue. Les triangles C I D, H I o, ayant leurs côtés perpendiculaires, sont semblables; donc C D $= y$: C I $= a$ :: H o $= \frac{ydy}{\sqrt{(aa-yy)}}$: H I $= dx = hr = \frac{ady}{\sqrt{(aa-yy)}}$; donc l'élément $hrmn = \frac{aydy}{\sqrt{(aa-y^2)}}$, dont l'intégrale ou l'aire $ahm = S. aydy . (aa-yy)^{-\frac{1}{2}} = -a\sqrt{(aa-yy)} + C$. Pour déterminer la constante C, je fais $y = 0$; dans ce cas l'on doit avoir $ahm = 0$; donc $-a\sqrt{aa} + C = 0$, ou $C = +a\sqrt{aa} = aa$; donc l'intégrale complette est $aa - a\sqrt{(aa-yy)}$. Si l'on fait $y = a = bc$, l'on a l'aire entiere $abc = aa - a\sqrt{0} = aa =$ A C B F quarré de a.

21. PROBLÊME. *Quarrer l'hyperbole* A G, *rapportée à ses axes.* (Fig. 11.). Soit le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $=$ C B $= b$. Par la nature de la courbe, en comptant les x depuis le sommet A, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$ & si l'on fait $b = a$; c'est-à-dire, si l'hyperbole est supposée équilatere, l'on aura S. $y\,dx =$ S. $dx\,(2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$; tandis que l'aire S. $y\,dx$ de l'hyperbole non équilatere sera $\frac{b}{a}$ S. dx. $(2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$; donc si l'on a l'aire de l'hyperbole équilatere, & qu'on la multiplie par $\frac{b}{a}$, il en résultera l'aire de l'hyperbole non équilatere. Pour avoir l'aire de l'hyperbole équilatere, on réduira $(2a + x)^{\frac{1}{2}}$ en série, en faisant pour simplifier $2a = c$; multipliant ensuite tous les termes par $x^{\frac{1}{2}}\,dx$, & intégrant, l'on trouvera, toute réduction faite, S. $y\,dx =$ S. dx. $\sqrt{(cx + xx)} = \sqrt{2ax}.\left(\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7aa} + \frac{1.3x^4}{4.6.9a^3} - \&c.\right)$, en remettant la valeur de c. En multipliant cette série par $\frac{b}{a}$, l'on auroit l'aire d'une hyperbole non équilatere.

Si l'on compte les x depuis le centre C, l'élément de l'aire de notre hyperbole supposée équilatere sera $= dx\sqrt{(xx - aa)}$, parce que dans ce cas $y = \sqrt{(xx - aa)}$. Si l'on vouloit l'élément de l'aire

AGHC, l'on auroit $HG = CP = x$, & $HC = GP = y$; mais l'équation feroit $y^2 = xx - aa$, ou $x^2 = yy + aa$; si l'on fait $CH = PG = x$, & $CP = HG = y$, l'on aura $yy = xx + aa$, $y = GH = \sqrt{(xx + aa)}$, $ydx = dx . \sqrt{(xx + aa)}$, & l'aire cherchée $= S. dx \sqrt{(xx + aa)}$. Si l'on fait $GP = y$, l'équation $GH = \sqrt{(xx + aa)}$ donne $GH = \sqrt{(yy + aa)}$, parce que x se change en y; donc Pp différentielle de $CP = GH$ devient $= \frac{ydy}{\sqrt{(yy + aa)}}$. Multipliant Pp par GP, l'on a la différentielle de l'aire $AGP = \frac{yydy}{\sqrt{(yy + aa)}}$. Si l'on vouloit avoir l'aire CAGH exprimée par l'ordonnée HG au second axe, en faisant $HG = y$, l'on auroit $\overline{CH}^2 = \overline{GP}^2 = x^2 = y^2 - a^2$, $CH = \sqrt{(yy - aa)}$, la différentielle $HD = \frac{ydy}{\sqrt{(yy - aa)}}$, & l'élément $DHGg = \frac{yydy}{\sqrt{(yy - aa)}}$.

Comparons ces élémens de l'aire de l'hyperbole équilatere, avec ceux de l'aire du cercle. En faisant le rayon du cercle $= a$, (Fig. 3.) & $AP = x$, l'élément de l'aire circulaire sera $= dx . \sqrt{(2ax - xx)} = dx . \sqrt{(ax - xx)}$ (en faisant le diametre $= a$). Mais l'aire sera $= S. dx . \sqrt{(aa - xx)}$, le rayon étant $= a$, & l'origine des x étant au centre. Tout cela suit ce qu'on a dit ci-dessus (14).

Si l'on fait $CH = x = \sqrt{(aa - yy)}$, $Hi = y$, $rl = dy$, $il = Hh = \pm dx$ (les signes +

ou — ont lieu ſelon que x va en augmentant ou en diminuant), les triangles CHi, ril (ſemblables parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires) donnent $\sqrt{(aa - yy)} : y :: dy : \pm dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$. Mais parce que y diminue lorſque x augmente, l'élément $y\,dx$ de l'eſpace $CDiH$, ſera $= \frac{-yy\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$. S'il s'agit au contraire de l'eſpace AHi, ſon élément eſt $= - dx \cdot y = \frac{yy\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, parce que dans le premier cas dy a le ſigne — & le ſigne + dans le ſecond.

L'on peut auſſi comparer les ſecteurs circulaires & les arcs circulaires avec les ſecteurs hyperboliques, qui, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus, peuvent être regardés comme les logarithmes des abſciſſes correſpondantes; donc les ſecteurs correſpondans à des abſciſſes en progreſſion géométrique, ſont en progreſſion arithmétique. Si l'on diviſe ces ſecteurs par la moitié du demi-axe, ils ſeront encore en progreſſion arithmétique, & nous appellerons *logarithmes hyperboliques d'une dimenſion*, ou *logarithmes hyperboliques ſimples*, ces ſecteurs ainſi diviſés.

Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (14) en faiſant la tangente AT (Fig. 3.), $= x$, & le rayon du cercle $= a$, le ſecteur Cir eſt $= \frac{a^3\,dx}{2 \cdot (aa + xx)}$. Mais le ſecteur réſulte de l'arc ir multiplié par la moitié $\frac{a}{2}$ du rayon. Donc en diviſant ce ſecteur élémentaire par $\frac{a}{2}$ l'on a $\frac{a^2\,dx}{aa + xx}$ pour l'élé-

ment de l'arc A r, & l'arc A r est $= S. \frac{a^2 dx}{aa + xx}$.

A cause des triangles C H i, $r i l$ (Fig. 3.), semblables, parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires, l'on aura $r i : i l = H h :: C i : i H$, ou en faisant A H $= x$, H $h = dx$, $ri : dx :: a : \sqrt{(2ax - xx)}$, ou $ri = \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$

& $S. \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = A i D$. Si l'on prend les abscisses du centre C, l'on aura H $h = li = -dx$: donc $ir : -dx :: a : \sqrt{(aa - xx)}$ & $ri = \frac{-a dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$. De même l'on a $ir : rl :: Ci : CH$. C'est pourquoi en faisant $i H = y$, l'on a $rl = dy$, C H $= \sqrt{(aa - yy)}$; donc $ir : dy :: a : \sqrt{(aa - yy)}$, ou $ir = \frac{a dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$.

Les triangles semblables T t $ſ$, C T A & les secteurs semblables C $i r$, C $ſ t$, donnent $ir : t ſ :: Ci = CA : Ct$. & $ſt : ſT :: CA : tA$, ou $ſt = \frac{CA . ſT}{tA}$. Substituant cette valeur au lieu de $ſt$, l'on a $ir : \frac{CA . ſT}{tA} :: CA : Ct$, ou $ir : CA :: \frac{CA . ſT}{tA} : Ct :: ſT : \frac{Ct . tA}{CA}$; donc $ir : ſT :: CA : \frac{Ct . tA}{CA} :: CA^2 : Ct . tA$;

ou $ir : ſT :: \overline{CA}^2 : Ct . tA$; donc en faiſant la ſécante, $Ct = ſ$, l'on a $ir : dſ = ſT :: aa : ſ.\sqrt{(ſſ - aa)}$: car alors $tA = \sqrt{(ſſ - aa)}$, ou $ir = \frac{a^2 dſ}{ſ.\sqrt{(ſſ - aa)}}$. Si l'on multiplie la valeur de ir par $\frac{a}{2}$, l'on aura le ſecteur élémentaire $Cir = \frac{a^3 dſ}{2.ſ.\sqrt{(ſ^2 - aa)}}$. Si l'on fait la co-tengente $= x$, l'élément ir de l'arc AD ſera $= \frac{-a^2 dx}{aa + xx}$, & le ſecteur Cir conſidéré comme l'élément du ſecteur CAi ſera $= \frac{-a^3 dx}{2.(aa + xx)}$; parce que l'arc Ai augmentant, la co-tangente diminue, & ſi l'on fait la co-ſécante $= ſ$, l'on aura les mêmes formules que l'on vient de trouver en employant la ſécante, mais elles ſeront affectées du ſigne $-$, parce que la co-ſécante diminue lorſque l'arc augmente.

Soit l'hyperbole équilatere AM (Fig. 12.) dont le centre ſoit C, le demi-axe $AC = a$, que nous appellerons le ſinus total ou le rayon par analogie au cercle, l'abſciſſe $CP =$ le co-ſinus, l'ordonnée $PM =$ le ſinus & l'abſciſſe $AP =$ le ſinus verſe. Si l'on fait $AP = x$, l'on aura $CP = a + x$, $PM = \sqrt{(2ax + xx)}$. Donc le triangle $CMP = \frac{(a + x).\sqrt{(2ax + xx)}}{2}$. Le ſecteur CAM eſt égal à ce triangle, moins le demi-ſegment

A M P; donc l'élément du secteur est égal à l'élément du triangle, moins l'élément du secteur. demi-segmen
L'élément du demi-segment A M P est $= dx\sqrt{(2ax + xx)}$, celui du triangle est $\frac{dx \,.\, \sqrt{(2ax+xx)}}{2} + \frac{(a+x)}{2} \times \frac{dx\,.\,(a+x)}{\sqrt{(2ax+xx)}}$, d'où retranchant $dx\sqrt{(2ax+xx)}$, il reste $dx\frac{aa+2ax+xx}{2\sqrt{(2ax+xx)}} - 2dx\frac{\sqrt{(2ax+xx)}}{2} = \frac{aadx}{2\sqrt{(2ax+xx)}}$; donc le secteur CMA est $= S.\frac{aadx}{2\sqrt{(2ax+xx)}}$, & le logarithme hyperbolique simple exprimé par le Sinus verse sera $= S.\frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$. Si l'on fait le co-sinus $CP = x$, l'on aura $PM = \sqrt{(xx - aa)}$, & le triangle CMP sera $= x\frac{\sqrt{(xx-aa)}}{2}$. Si l'on différencie cette quantité & qu'on en retranche $dx\sqrt{(xx-aa)}$, qui dans ce cas exprime la différentielle du demi-segment A P M, l'on aura l'élément du secteur $CAM = \frac{aadx}{2\sqrt{(xx-aa)}}$; ce secteur sera $= S.\frac{aadx}{2\sqrt{(xx-aa)}}$, & le logarithme hyperbolique simple exprimé par le co-sinus

ſera $= S. \frac{a\,dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Suppoſons le ſinus P M $= y$: en comptant les abſciſſes $x =$ C P du centre, l'on aura $y^2 = x^2 - aa$, ou $x^2 = aa + yy$, ou $x =$ C P $= \sqrt{(aa + yy)}$; donc la différentielle P p ſera $= \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$. Multipliant cette différentielle par y, l'on a l'élément du demi-ſegment $= \frac{yy\,dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$; & le triangle CMP eſt alors $= \frac{y \cdot \sqrt{(aa + yy)}}{2}$. Si l'on en prend la différentielle, & qu'on en retranche celle du demi-ſegment, l'on aura le ſecteur $= S. \frac{aa\,dy}{2\sqrt{(aa + yy)}}$, & le logarithme hyperbolique ſimple exprimé par le ſinus ſera $= S. \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$.

Si du point A l'on tire A F paralelle au ſecond demi-axe C B, on appellera cette ligne tangente hyperbolique. Il s'agit d'exprimer le ſecteur hyperbolique par la tangente A F que nous ferons $= t$. En faiſant le co-ſinus C P $= x$, le ſinus P M $= y$, les triangles ſemblables C A F, C P M donneront $x : y :: a : t$, $x^2 : y^2 :: aa : tt$, & (*dividendo*) $x^2 - y^2 = aa$ * $: y^2 :: aa - t^2 : t^2$; donc y^2

* De l'équation à l'hyperbole équilatere $y^2 = x^2 - aa$, l'on tire aiſément $x^2 - yy = aa$.

$= \frac{aat^2}{aa-t^2}$, & $aa+y^2 = aa + \frac{a^2t^2}{aa-t^2}$
$= \frac{a^4}{a^2-t^2}$. $\sqrt{(aa+yy)} = \frac{a^2}{\sqrt{(aa-t^2)}}$
De plus l'équation $y^2 = \frac{aat^2}{aa-t^2}$ donne $y =$
$\frac{at}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$; donc $dy = \frac{adt}{\sqrt{(aa-t^2)}} +$
$\frac{at^2dt}{(aa-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ * $= \frac{a^3dt}{(aa-t^2)^{\frac{3}{2}}}$: substituant les valeurs de dy & de $\sqrt{(aa+yy)}$ dans
S. $\frac{a^2dy}{2\sqrt{(aa+yy)}}$, & dans S. $\frac{ady}{\sqrt{(aa+yy)}}$
$=$ S. $\frac{ady}{(aa+yy)^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura le secteur $=$
S. $\frac{a^3dt}{2.(aa-t^2)}$, & le logarithme hyperbolique simple $=$ S. $\frac{a^2dt}{aa-t^2}$.

Si de l'extrémité B du second demi-axe, l'on tire B D parallelement au premier axe, jusques à la rencontre de C M prolongée, s'il le faut, nous appellerons B D co-tangente hyperbolique. Si l'on fait cette co-tangente $= z$, les triangles rectangles CAF, CBD ayant les angles aigus BDC, ACF

* On prend la différentielle en faisant varier successivement t & $\frac{a}{\sqrt{(aa-t^2)}} = a(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

alternes internes, sont semblables ; donc $t : a :: a : z = \frac{aa}{t}$, & $t = \frac{aa}{z}$, $dt = \frac{-a^2 dz}{z^2}$, & $aa - t^2 = aa - \frac{a^4}{z^2} = \frac{aa}{z^2} . (z^2 - aa)$; donc $\frac{dt}{aa - t^2} = \frac{-dz}{zz - aa}$; donc le secteur CAM $= S. \frac{a^3 dt}{2.(aa - t^2)}$ sera $= S. \frac{-a^3 dz}{2.(z^2 - a^2)}$, & le logarithme hyperbolique simple sera $= S. \frac{-aadz}{zz - aa}$

Si l'on réduit $\frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}} = a(aa - yy)^{-\frac{1}{2}}$ en une série infinie, en élevant $(aa - yy)$ à la puissance $-\frac{1}{2}$ par le binome de Newton, qu'on multiplie tous les termes de la série résultante de cette opération par a & par dy, & qu'on integre, l'on aura (Fig. 7.) l'arc circulaire A $r = S. \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa - yy}} = y + \frac{y^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.y^5}{2^2.1.2.5.a^4} + \frac{1.3.5.y^7}{2^3.1.2.3.7.a^6}$ + &c. Cette série est utile pour trouver les arcs qui ne sont pas plus grands qu'un quart de cercle. Si l'on fait $y = a$, l'on a l'arc de 90°. $= a(1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.1.2.5} + \frac{1.3.5}{2^3.1.2.3.7} + \frac{1.3.5.7}{2^4.1.2.3.4.9} + \frac{1.3.5.7.9}{2^5.1.2.3.4.5.11}$ &c.) (A). L'on a le logarithme hyperbolique simple =

$$S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}}=y-\frac{y^3}{2.3\,a^2}+\&c.(B).$$

C'eſt la même ſérie que la précédente, excepté que les termes de celle-ci ont les ſignes + & — alternativement. Si l'on fait $y=a$, & que l'on change les ſignes des termes de rang pair de la ſérie A, l'on aura le logarithme hyperbolique ſimple, correſpondant à $y=a$. Nous ferons ce logarithme $=$ D. Si l'on ſuppoſe $y>a$, la ſérie B ſera divergente ; dans ce cas on élévera $aa+yy$ à la puiſſance $-\frac{1}{2}$ en prenant yy pour le premier terme, ou l'on élévera $yy+aa$, à la puiſſance $-\frac{1}{2}$, & l'on aura

$$S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy+aa)}}=a.L.y+\frac{a^3}{2.2.y^2}-\frac{1.3\,a^5}{2^2.1.2.4.y^4}+\frac{1.3.5.a^7}{2^3.1.2.3.6.y^6}-\frac{1.3.5.7.a^9}{2^4.1.2.3.4.8.y^8}+\&c+C.$$

Quoiqu'en faiſant $y=0$, le ſecteur CAM doive être égal à o, auſſi bien que la ſérie qui exprime le logarithme hyperbolique ſimple, néanmoins cette ſuppoſition ſeroit inutile pour déterminer la conſtante C, parce que dans ce cas tous les termes de la ſérie deviennent infinis. Mais on a dit ci-deſſus que le logarithme hyperbolique ſimple correſpondant à $y=a$ étoit $=$ D ; on fera donc $y=a$ & l'on égalera la ſérie que nous venons de trouver, avec la ſérie B, dans laquelle on mettra a au lieu de y, & l'on aura

$$a.L.a+C+\frac{a}{2.2}-\frac{1.3\,a}{2^2.1.2.4}+$$

$\frac{1.3.5.a}{2^3.1.2.3.6}$ &c. $=$ D $= a(1 - \frac{1}{2.3} +$
$\frac{1.3}{2^2.1.2.5})$ &c. ou C $= a(1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.1.2.5})$ &c.
$- a$ L. $a - a(+\frac{1}{2.2} - \frac{1.3}{2^2.1.2.4}$ &c.)
$= - a$ L. $a - a + \frac{(2+3).a}{2.2.3} -$
$\frac{(4+5).1.3.a}{2^2.1.2.4.5} + \frac{(6+7).1.3.5.a}{2^3.1.2.3.6.7}$, &c.
en réduisant les termes; donc S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy+aa)}} =$
a . L. $y - a$. L. $a - a + \frac{(2+3)a}{2.2.3}$ &c. $+$
$\frac{a^3}{2.2.y^2} - \frac{1.3.a^5}{2^2.1.2.4.y^4} +$ &c. En multipliant la série par $\frac{a}{2}$, l'on aura le secteur hyperbolique correspondant à y.

Nous avons dit ci-dessus qu'en faisant le cosinus $= x$, le logarithme hyperbolique simple étoit $=$ S. $\frac{a\,dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$. Si l'on change x en y, ce logarithme sera $=$ S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Si l'on fait AP $=$ S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, AB $= a$ & que l'on décrive la courbe B m (Fig. 13.) en prenant toujours l'ordonnée égale au co-sinus hyperbolique y, l'abscisse

ciſſe AP $= x$ étant égale au logarithme hyperbolique ſimple, l'on aura $x = S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy - aa)}}$, $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(yy - aa)}}$. C'eſt l'équation de la ligne des *co-ſinus hyperboliques* *. Si l'on fait A P $= x = S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$, en prenant PM égale au *ſinus hyperbolique* (ſuppoſé $= y$), l'on aura $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa + yy)}}$; & la courbe A M dont les abſciſſes ſont égales aux logarithmes hyperboliques ſimples, & les ordonnées PM aux ſinus correſpondans eſt appellée ligne des *ſinus hyperboliques*.

Au reſte par logarithme hyperbolique ſimple, on entend ceux qu'on trouve en diviſant les ſecteurs hyperboliques d'une hyperbole équilatere dont le demi-axe $= a$ par $\frac{a}{2}$.

22. REMARQUE I. Si l'on fait A F $= y$, F $n = x$, l'on aura F B (fig. 1.) $= dy$, l'élément B F M $n = x\,dy$ & S $x\,dy$ ſera l'eſpace A B M. Soit $y^2 = ax$ l'équation de la parabole, l'on aura $x = \frac{y^2}{a}$, $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Donc S. $x\,dy$ ſera $= S.\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}+1} dx =$

* Si l'on change x en p, & y en q, l'on a $dp = \frac{a\,dq}{\sqrt{(qq - aa)}}$ qui eſt l'équation que nous avons trouvée ſection précédente (108) pour la développée de la tractrice.

$\frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}+2}}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3} y x$; c'eſt-à-dire, que l'eſpace extérieur A B M de la parabole eſt égal au tiers du rectangle de l'ordonnée $i n$, & de l'abciſſe F n = A i.

REMARQUE. II. Si l'angle des ordonnées & des abciſſes n'étoit pas droit, ſi cet angle M P N étoit = u (Fig. 14.) dans ce cas le parallélograme P p M n qu'on peut regarder comme l'élément de l'aire A M P ſeroit égal au produit de P p = $d x$ par la hauteur M N de ce parallélograme. Pour trouver M N, je remarque que dans le triangle rectangle M N P, en faiſant M P = y, & le ſinus total = r, l'on a $r : y :: \text{ſinus } u :$ M N = $\frac{\text{ſinus } u \,.\, y}{r}$; donc en ſubſtituant cette valeur au lieu de y, l'élément de l'aire ſera = $\frac{\text{ſinus } u \,.\, y}{r} \,.\, d x$, & l'aire A M P = S. $\frac{\text{ſinus } u \,.\, y \, d x}{r} = \frac{\text{ſinus } u}{r} \times$ S. $y \, d x$. Il ſuffira donc de chercher l'aire comme ſi les ordonnées étoient perpendiculaires aux abciſſes, & de la multiplier enſuite par $\frac{\text{ſinus } u}{r}$, le produit donnera l'aire cherchée.

On a trouvé ci-deſſus (4) l'aire parabolique A M P (Fig. 1.) = $\frac{2}{3} x y$, en ſuppoſant l'angle des ordonnées & des abciſſes, droit. Si l'angle MPp étoit tel que l'on eût $\frac{\text{ſinus } u}{r} = \frac{1}{2}$, cette aire ſeroit = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} x y = \frac{1}{3} x y$.

23. Si les ordonnées partent d'un point C (Fig. 15.) on décrira du centre C avec le rayon $CB = y$, l'arc $Bn = dx$ entre les rayons infiniment proches BC, bC, & l'on pourra regarder le secteur CBn comme égal au triangle CBb; or le secteur CB$n = \frac{ydx}{2}$; donc S. $\frac{ydx}{2} = \frac{1}{2}$ S. ydx sera la formule de quadrature dans ce cas-là. Pour intégrer $\frac{1}{2}ydx$, l'on substituera dans cette formule la valeur de dx donnée en y & dy; & l'on doit remarquer que dx étant un arc décrit d'un rayon variable y, on ne sauroit avoir son intégrale.

Soit le rayon $CA = a$, je décris un cercle avec le rayon a, & je fais l'arc variable de ce cerle $AM = z$, $Mm = dz$, les arcs Bn, Mm étant décrits du même centre entre les côtés d'un même angle C, les secteurs BCn, MCm, sont semblables; donc CB : CM :: Bn : Mm, ou $y : a :: dx : dz$; donc $dx = \frac{ydz}{a}$; donc $\frac{1}{2}$ S. $ydx = \frac{1}{2}$ S. $\frac{y^2dz}{a}$. On pourra substituer dans cette formule la valeur de dz en y & dy, & l'intégrer ensuite.

24. PROBLÈME. *Trouver la quadrature de la spirale d'Archimede, dans laquelle en suppôsant le rayon du cercle générateur $= r$, la circonférence $= c$, l'on a l'équation $cy = rx = ax$, en faisant $r = a$.* Pour employer la formule que l'on vient de trouver, nous substituerons z à x, ce qu'on peut faire, parce que x désigne dans l'équation de la courbe, un arc de cercle décrit d'un rayon constant, & nous

aurons $cy = az$, $adz = cdy$, $dz = \frac{c}{a}dy$. Substituant cette valeur de dz dans la formule $\frac{1}{2}.\frac{y^2}{a}dz$, l'on a $\frac{c}{2a^2}.y^2dy$, pour la valeur du secteur CBn (*Fig.* 16.); donc $\frac{c}{2aa}$ S. y^2dy est égale à l'espace CfB compris entre l'arc CfB & le rayon CB. Or S. $y^2dy = \frac{y^3}{3}$; donc cet espace est $= \frac{c}{6}.\frac{y^3}{a^2}$, & si l'on fait le rayon $CB = a =$ CA, l'espace entier de la spirale d'Archimede CBA sera $= \frac{c}{6}.\frac{a^3}{a^2} = \frac{c.a}{6}$; c'est-à-dire, que la surface de la spirale d'Archimede est égale au sixieme du rectangle de la circonférence & du rayon. Or la surface du cercle générateur est $= \frac{ca}{2}$; donc l'aire de la spirale est à la surface du cercle générateur comme $\frac{ca}{6} : \frac{ca}{2} :: \frac{1}{6} : \frac{1}{2} :: 2 : 6 :: 1 : 3$.

25. PROBLÊME. *Quarrer les spirales représentées par l'équation $c^n y^m = r^m x^n = a^m z^n$, en faisant $r = a$ & $x = z$, comme dans le Problême précédent.* L'on aura $a^m z^n = c^n y^m$, $z^n = \frac{c^n}{a^m}.y^m$, $z = \frac{c}{a^{\frac{m}{n}}}.y^{\frac{m}{n}}$, en prenant la racine n de part & d'autre; $dz = \frac{\frac{m}{n}.c.y^{\frac{m}{n}-1}dy}{a^{\frac{m}{n}}}$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 dz}{a} = \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+1} dy$, dont l'intégrale est $= \frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+2}$ *;

Si l'on suppose $y = a$, cette intégrale devient $\frac{n}{(m+2n)} \times \frac{m}{2n} \, c \, a^{\frac{m}{n}+2 - \frac{m}{n} - 1}$ (en retranchant l'exposant $\frac{m}{n} + 1$ de l'exposant $\frac{m}{n} + 2$) $= \frac{m \cdot ac}{2m+4n}$. Si $m = n = 1$, l'on a $\frac{1}{6}\, a \cdot c$. Si $m = 3$, & $n = 5$, l'on a $\frac{3ac}{26}$, c'est-à-dire $\frac{3}{26}$ du rectangle de la circonférence & du rayon du cercle générateur ; en général on aura la surface $= \frac{m}{2m+4n} \cdot \frac{c\,y^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}$.

REMARQUE. Si l'on suppose que le rayon C a soit $= 2a = 2$ CA dans la spirale d'Archimede, c'est-à-dire, si l'on suppose que le point décrivant

* L'exposant $\frac{m}{n} + 1$ étant augmenté d'une unité devient $= \frac{m}{n} + 2 = \frac{m+2n}{n}$, & diviser par cette fraction, c'est multiplier par $\frac{n}{m+2n}$.

B se meuve uniformément sur le rayon C a, de maniere qu'après la premiere révolution du rayon autour de C, ce point se trouve en A, & qu'après la seconde révolution il se trouve en a, l'intégrale $\frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{cy^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}$, devient $=$ $\frac{m}{2m+4n} \cdot \frac{c}{a^2} y^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{c}{aa} y^3 = \frac{8}{6} \cdot \frac{ac}{3} =$ $\frac{8}{6}\, ac$, lorsque $y = 2a$. Si l'on veut avoir l'espace renfermé entre la seconde spire & le cercle générateur, voici comme il faut s'y prendre.

Je fais la variable M g $= y$; donc C g $= a + y$. Faisant M $m = dz$, & du point C décrivant l'arc g L, les secteurs semblables C M m, C g L donneront $a : dz : a + y : gL = \frac{(a+y)}{a} dz$.

Le trapèze M m L g est $= \frac{(Mm + gL)Mg}{2}$ $= \frac{(ay + yy)dz}{2a} + \frac{ydz}{2}$; mais par la nature de la courbe, $az = cy$, $dz = \frac{c}{a} dy$; donc l'élément de l'espace cherché est $= \frac{c}{a} \times$ $\left(\frac{aydy + y^2dy}{2a} + \frac{ydy}{2}\right)$, dont l'intégrale est $= \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{y^3}{3}}{2a} + \frac{y^2}{4}\right)$. Si y

$= 0$, l'intégrale eſt $= 0$, comme cela doit être ; ainſi il n'y a point de conſtante à ajoûter. Si l'on fait $y = a$, l'intégrale devient $= \frac{c}{a} \times$

$$\frac{\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{4}\right)}{2a} = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5aa}{12} + \frac{aa}{4}\right)$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5aa + 3aa}{12}\right) = ca \cdot \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3} \cdot ca$$

$= \frac{4ca}{6}$; mais l'eſpace renfermé dans la premiere ſpire eſt $= \frac{1}{6}\, a\, c$; c'eſt-à-dire eſt égal au tiers du cercle générateur & par conſéquent l'eſpace renfermé entre la circonférence du cercle générateur & la premiere ſpire, eſt les deux tiers du cercle générateur, ou eſt $= \frac{2ac}{6}$; donc l'eſpace renfermé entre les deux ſpires eſt $= \frac{6}{6}\, a\, c = a\, c$, ou double du cercle générateur, & la ſurface compriſe entre le centre C & la ſeconde ſpire eſt $= \frac{7}{6}\, a\, c$; donc la ſurface $\frac{8}{6}\, a\, c$ renferme d'abord la ſurface $\frac{1}{6}\, a\, c$ de la premiere ſpire, plus la ſurface de la ſeconde, d'où l'on peut conclure que lorſque l'intégrale répond à une ſpire qui en renferme pluſieurs autres, les ſurfaces des ſpires intérieures ſont compriſes dans l'intégrale de maniere que s'il s'agit de la troiſieme ſpire toute entiere, la ſurface exprimée par l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{aa} \cdot \frac{y^3}{3}$, qui dans ce cas devient $= \frac{27}{6}\, a\, c$ (parce que alors $y = 3\, a$.), renferme la ſurface com-

prise entre le centre C & la troisieme spire ; plus la surface comprise entre la seconde spire & le centre, plus la surface comprise entre la premiere spire & le centre. En effet si l'on cherche la surface comprise entre la troisieme spire & un cercle dont le rayon seroit $= 2\ a$, on trouvera par une méthode semblable à celle que l'on vient de mettre en usage pour la seconde spire, que cette surface est $= \frac{7}{6}\ a\ c$, & comme le cercle dont le rayon est $2\ a$, est $= 2\ a\ c$, (ou quadruple du cercle générateur $\frac{1}{2}\ a\ c$) $= \frac{12\ a\ c}{6}$, l'espace compris entre la troisieme spire & le centre sera $= \frac{19}{6} . a\ c$; donc l'intégrale $\frac{27}{6}\ a\ c$ contient encore $\frac{7}{6}\ a\ c +$ $\frac{1 . a\ c}{6}$, ou l'espace compris entre la seconde spire & le centre, c'est-à-dire la surface de la seconde spire, plus la surface de la premiere spire & ainsi de suite; de sorte que l'intégrale qui répondra à une spire du rang n, contiendra, outre la surface de cette spire comprise entre le centre & cette spire, contiendra dis-je, la somme des surfaces de toutes les spires renfermées dans la plus grande qui est celle du rang n. Si l'on fait attention qu'après la premiere révolution ce rayon variable C B a parcouru la surface de la premiere spire, que dans la seconde révolution ce rayon parcourt la surface de la seconde spire, &c. On pourra concevoir pourquoi l'intégrale qui répond à la cinquieme spire, par exemple, renferme non-seulement la surface de la cinquieme spire, mais encore la somme des surfaces de la 4e, 3e, 2e, 1re spires. Il est bon de bien remarquer cela pour ne pas tomber dans l'erreur, en s'imaginant que la surface renfermée entre la

courbe $a\,g$ A B C & la ligne A a, par exemple, eſt $= \frac{8\,a\,c}{6}$, tandis qu'elle eſt ſeulement $= \frac{7}{6}\,a\,c$ *.

Mais, dira-t-on, comment donc trouver la ſurface compriſe entre le centre & une ſpire quelconque, par exemple, la quatrieme ? L'on n'a qu'à prendre l'intégrale en ſuppoſant $y = 4\,a$, & l'on aura $\frac{64\,a\,c}{6}$; on prendra auſſi l'intégrale en ſuppoſant $y = 3\,a$, c'eſt-à-dire, l'intégrale qui répond à une ſpire d'un rang immédiatement inférieure, l'on aura $\frac{27\,a\,c}{6}$; on retranchera cette intégrale de la premiere, le reſte $\frac{37.\,a\,c}{6}$ donnera la ſurface de la 4[e] ſpire, ce qui eſt évident.

26. PROBLÊME. *Soit ſuppoſee* A B (Fig. 15.) *une courbe rapportée au foyer* C *telle que ſon équation ſoit* B $n = d\,x = \frac{d\,y\,\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$ *dont on demande l'aire.* En ſubſtituant la valeur de $d\,x$ dans la formule $\frac{1}{2}$. S. $y\,d\,x$, l'on aura $\frac{1}{2}$. S. $y\,d\,x$ $= \frac{1}{2}.\,S.\,\frac{y^{\frac{3}{2}}\,d\,y}{\sqrt{a}} = \frac{y^{\frac{5}{2}}}{5.\sqrt{a}} + C$. Si l'aire doit s'évanouir en faiſant $y =$ C A $= a$, l'on aura $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{5.\,a^{\frac{1}{2}}} + C = 0$, ou $C = -\frac{a^2}{5}$; telle eſt

* S'il s'agit de la ſurface de la troiſième ſpire, on doit entendre, 1°. La ſurface de la premiere, plus l'aire compriſe entre la 1[e] & la 2[e] ; plus l'aire compriſe entre la 2[e] & la 3[e]. C'eſt la ſomme de ces aires qui forme la ſurface de la 3[e] ſpire. On comprend par-là ce que c'eſt que la ſurface de la 4[e], 5[e], &c. ſpire.

la valeur de la constante C dans ce cas, & l'intégrale complette sera $\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot \sqrt{a}} - \frac{a^2}{5}$, pourvu que y ne réponde qu'à une seule spire tout au plus en comptant depuis le point auquel répond $y = a$, autrement il faut avoir égard à la remarque du N°. précédent.

27. PROBLÊME. *Quarrer la spirale de l'équation* $dx = \frac{dy\sqrt{(yy - bb)}}{b} = \frac{dy\sqrt{(yy - aa)}}{a}$, *en faisant* $b = a$. Supposons que la courbe A B (Fig. 15.) soit celle de l'équation ; ce sera donc, comme il suit de ce qu'on a dit dans la section précédente (106), la développante d'un cercle dont le rayon $= a$. Substituant la valeur de dx dans $\frac{1}{2} y\, dx$, & intégrant, l'on aura l'aire

$$ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(yy - aa)^{\frac{3}{2}}}{a} = \frac{1}{3a} (yy - aa)^{\frac{3}{2}};$$

cette aire devient $= 0$, lorsque $y = a$, comme cela doit être ; ainsi je n'ajoûte point de constante.

Pour trouver l'espace compris entre la courbe & la circonférence du cercle, il suffit de retrancher de l'intégrale ci-dessus le secteur circulaire correspondant C A M.

On peut aussi s'y prendre de la maniere suivante : ayant tiré les rayons osculateurs infiniment proches, B s, $b\,p$, qui étant des tangentes du cercle, sont perpendiculaires aux rayons C s, C p ; si l'on conçoit que le point p s'écarte du point s, de maniere que C p fasse un angle infiniment petit avec C s, la ligne $b\,p$ fera un angle égal avec B s prolongée s'il le faut. Maintenant faisant A s = B s = z, $sp = dz$, & regardant l'arc

B b comme un petit arc circulaire, les secteurs B p b, s C p, seront semblables, & l'on aura C $s = a : s\,p = d\,z$ :: B $s = b\,p = z$: B $b = \frac{z\,d\,z}{a}$. Multipliant cette valeur par $\frac{z}{2}$, l'on a le secteur élémentaire $b\,p$ B $= \frac{1}{2a} \cdot z^2 d\,z$, & en intégrant l'espace A s B sera $= \frac{1}{6a} z^3$. On n'ajoûte point de constante, parce que lorsque $z = 0$, l'intégrale est $= 0$. Si l'on fait $z = c$, l'espace entier compris entre la circonférence c du cercle & la branche entiere A B sera $= \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{a}$.

Mais la surface du cercle est $= \frac{a \cdot c}{2}$; donc cette surface est à celle qu'on vient de trouver comme $\frac{a \cdot c}{2} : \frac{c^3}{6a}$ :: $a : \frac{c^2}{3a}$ :: $3\,a\,a : c^2$; c'est-à-dire, comme le triple du quarré du rayon au quarré de la circonférence.

REMARQUE. Si l'on développoit le cercle en allant de A en R, on auroit une autre courbe A L qui ne différeroit de la premiere que par sa position.

28. PROBLÊME. *Quarrer la spirale hyperbolique représentée par l'équation $y\,z = a\,c$.* (Fig. 17.)

On aura $z = \frac{a \cdot c}{y} = a\,c\,y^{-1}$, $d\,z = -a \times c\,y^{-2} \cdot -d\,y$. (car z augmentant y diminue) $= a\,c\,y^{-2} d\,y$. Maintenant si l'on fait $y : d\,x :: a : d\,z$, l'on aura $d\,x = \frac{y\,d\,z}{a}$, & la formule $\frac{1}{2} \cdot y\,d\,x$ deviendra $= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{a} \cdot d\,z = \frac{1}{2a} \times a\,c\,y^2\,y^{-2} \cdot d\,y$

(en ſubſtituant la valeur de dz qu'on vient de trouver) $= \frac{c \cdot dy}{2}$; or S. $\frac{c \cdot dy}{2}$ eſt $= \frac{1}{2} cy$; donc ſi c eſt ſuppoſée repréſenter la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt $= a$, la ſurface de la ſpirale hyperbolique ſera la moitié du produit de cette circonférence par le rayon de la ſpirale ; & ſi $y = a$, la ſurface correſpondante ſera égale au cercle générateur. On comprend ici non-ſeulement la ſurface compriſe entre le centre & la ſpire qui eſt terminée au point auquel répond le rayon a, mais encore la ſomme des ſurfaces des ſpires intérieures. Si l'on ſuppoſe $y = \frac{1}{2} a$, en retranchant $\frac{1}{4} ac$ de $\frac{1}{2} ac$, on aura $\frac{1}{4} ac$, qui (ſelon la remarque du N°. 25.) ſera la ſurface compriſe entre le centre & la ſpire, à l'extrémité de laquelle aboutit le rayon $y = a$.

29. PROBLÊME. *Quarrer la ſpirale logarithmique, que je ſuppoſerai repréſentée par la* (Fig. 17.). L'angle C M T que fait le rayon avec la courbe ou ſa tangente étant conſtant, nous ferons la tangente de cet angle $= a$; donc en ſuppoſant le ſinus total $= 1$, le triangle rectangle M n m donnera $1 : mn :: a : Mn$, ou $1 : dy : a : dx = a\, dy$. Subſtituant cette valeur de dx dans la formule $\frac{1}{2} y\, dx$, l'on aura $\frac{1}{2}$ S. $y\, dx = \frac{1}{2}$ S. $ay\, dy = \frac{1}{4} \cdot ay^2$. Maintenant ſi l'on ſuppoſe tirée la tangente T M & la ſous-tangente C T, le triangle rectangle M C T, donne $1 :$ CM $:: a :$ CT, ou $1 : y :: a :$ CT $= \frac{ay}{1} = ay$; & ſi l'on multiplie CT $= ay$, par $\frac{y}{2}$,

l'on aura l'aire du triangle M C T $= \frac{ay^2}{2}$, donc ce triangle eſt double de l'aire compriſe entre la courbe & le rayon C M.

Mais ſelon la remarque du N°. 25, il faudra en retrancher l'intégrale qui répond à l'ordonnée de la ſpire précédente.

DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

30. *Rectifier une courbe c'eſt trouver une ligne droite égale à cette courbe.*

Soit A M (Fig. 1re.) une courbe quelconque dans laquelle les ordonnées ſoient perpendiculaires aux abſciſſes A P $= x$. Si l'on fait l'arc A M $= s$, l'arc infiniment petit M m ſera $= ds$; or le triangle rectangle M m R donne M m $= ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; il ne s'agit donc plus que d'intégrer $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; pour cela, on cherchera la valeur de dx ou celle de dy, qu'on ſubſtituera à la place de dx ou de dy, & enſuite l'on intégrera.

31. PROBLÊME. *Rectifier le cercle.* En comptant les abſciſſes du ſommet (Fig. 3.), l'on aura $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, $dy^2 = dx^2 \cdot \frac{(a - x)^2}{2ax - xx}$. Subſtituant cette valeur de dy^2 dans $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura

$$\sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2 \cdot (a - x)^2}{2ax - xx}\right)} = \frac{\sqrt{a\ dx^2}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

$= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = a\,dx.(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}.$

Résolvant $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$, en une série infinie par la méthode ordinaire *, multipliant ensuite tous les termes par $a\,dx$ & intégrant l'on aura l'arc $s = AM = (2ax)^{\frac{1}{2}} + \frac{1 . x^{\frac{3}{2}}}{2 . 3 . (2a)^{\frac{1}{2}}}$ $+ \frac{1 . 3 . x^{\frac{5}{2}}}{2 . 4 . 5 (2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 . 3 . 5 . x^{\frac{7}{2}}}{2 . 4 . 6 . 7 . (2a)^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Si l'on fait $x = AC = a$, l'on aura la valeur d'un arc de 90°. dont le quadruple donnera la longueur entiere de la circonférence.

Si l'on veut compter les abscisses du centre C, en faisant $CP = x$, $CA = a$, l'on aura $PM = y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy^2 = \frac{x^2\,dx^2}{aa - xx}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = adx.$ $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Réduisant $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ en série, multipliant tous les termes de cette série par $a\,dx$, & intégrant, l'on aura l'arc $DM = x + \frac{1 . x^3}{2 . 3 a^2}$ $+ \frac{1 . 3 . x^5}{2 . 4 . 5 . a^4} + \frac{1 . 3 . 5 . x^7}{2 . 4 . 6 . 7 . a^6} +$ &c. Si

* On peut, pour plus de facilité, faire d'abord $2a = c$, & substituer ensuite dans la série $2a$ au lieu de c.

l'on fait $x = a$, l'on aura le quart de cercle DAC $= a + \frac{a}{2.3} + \frac{3a}{2.4.5} + \frac{15a}{2.4.6.7}$ &c.

Si l'on fait $x = \frac{a}{2}$, comme x eſt le co-ſinus de l'arc DM, & par conſéquent le ſinus de MD, & que le ſinus de l'arc de 30° eſt égal à la moitié du rayon, ainſi qu'on l'a dit dans la trigonométrie, l'arc DM ſera $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2^3.2.3} + \frac{3.a}{2^5.2.4.5} + \frac{2.5.a}{2^7.2.4.6.7}$ &c. ſérie aſſez convergente. Multipliant cette ſérie par 12, l'on aura la longueur du cercle entier.

Pour rectifier le cercle par le moyen d'une tangente, AT $= x$, l'on n'a qu'à ſe rappeller qu'on a trouvé ci-deſſus (14) l'arc élémentaire $ri = \frac{aadx}{aa + xx}$. Or $\frac{a^2}{aa + xx}$, $= a^2 (aa + xx)^{-1}$ élevant donc $aa + xx$ à la puiſſance -1, par le binome de Newton, multipliant enſuite tous les termes de la ſérie par $aadx$, & intégrant, l'on aura l'arc A$r = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6}$ &c. $= x . (1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5.a^4}$ &c.$)$ $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ &c. en faiſant $a = 1$.

Si l'arc Ar eſt ſuppoſé de 45°, ſa tangente ſera égale au rayon du cercle; donc cet arc ſera $= (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c.$)$ Maintenant nous avons vu dans la premiere partie de

cet ouvrage, (Voyez la Géométrie) que si l'on a deux arcs a & b, l'on aura tang. $(a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \,.\, \text{tang. } b}$, en faisant le rayon $= 1$; donc si l'on suppose que deux arcs p & q pris ensemble valent $45°$, comme la tangente de $45°$ est égale au rayon, l'on aura $\frac{\text{tang. } p + \text{tang. } q}{1 - \text{tang. } p \,.\, \text{tang. } q} = 1$, ou tang. p + tang. $q = 1 -$ tang. $p \times$ tang. q, ou tang. q + tang. p . tang. $q = 1 -$ tang. p, ou tang. $q = \frac{1 - \text{tang. } p}{1 + \text{tang. } p}$. Si l'on suppose que la tangente de l'arc p soit $= \frac{1}{2}$, l'on aura tangente $q = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Maintenant si dans la série $x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \text{ \&c.}\right)$ On suppose $a = 1$ & $x = \frac{1}{2}$, & ensuite $x = \frac{1}{3}$; l'on aura dans le premier cas $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \text{ \&c.}\right)$, & dans le second cas $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} \text{ \&c}\right)$.

Si l'on prend la valeur des quinze premiers termes de la premiere série (en s'en tenant à *dix* décimales), pour l'ajouter à la valeur des dix premiers termes de la seconde; l'on aura $1 \,.\, (0.7853981634) = a \,.\, (0.7853981634)$. En exprimant le rayon par a, aulieu de l'exprimer par 1; donc l'arc de $45°$, pris dans un cercle dont le

le rayon est $= a$, sera à peu près égal à cette quantité, & si l'on multiplie par 4, l'on aura la demi-circonférence $= a.(3.1415926536)$; donc le rayon sera à la demi-circonférence, ou le diametre sera à la circonférence, comme $a : a.(3.1415926536) :: 1 : 3.1415926536$ à peu près. L'on auroit un rapport plus exact, en calculant un plus grand nombre de termes dans les séries ci-dessus.

32. PROBLÊME. *Rectifier un arc* D*n de cicloïde.* (Fig. 7.) En supposant le diamètre du cercle générateur $= a$, l'ordonnée P $n = y$, $ir = ns$ sera $= dy$; or on a vu ci-dessus (15) que $ns = \frac{dx\sqrt{(ax - xx)}}{x}$; donc $dy = dx \times \frac{\sqrt{(a - x)}}{\sqrt{x}}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + dx^2 \times \frac{(a - x)}{x}\right)} = \frac{\sqrt{(a\,dx^2)}}{\sqrt{x}} = a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$ dont l'intégrale est $= \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{ax}$; or la corde DM est moyenne proportionnelle entre le diamètre D C & la partie D P. (Voyez la géométrie.) Donc cette corde $= \sqrt{a.x}$; donc l'arc cicloïdal Dn est double de la corde correspondante du cercle générateur; ainsi l'arc DA est double du diamètre & la cicloïde entiere est quadruple du diamètre du cercle générateur.

33. PROBLÊME. *Rectifier l'hyperbole* MS, *supposée équilatere & rapportée à ses assimptotes* (Fig. 4).

Suppofant que AR $=$ RS $= a = 1$, rR $= x$, l'on aura $y \cdot (1 + x) = aa = 1$ *, $y = \frac{1}{1+x}$ $= 1 \cdot (1+x)^{-1}$, $dy = -dx \cdot (1+x)^{-2}$, $dy^2 = dx^2 \cdot (1+)^{-4}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\left(1 + (1+x)^{-4}\right)}$. Réduifant en férie la quantité fous le figne par la formule $(a+b)^m$, en faifant $a = 1$, $b = (1+x)^{-4}$, $m = \frac{1}{2}$, l'on aura $1 + \frac{1}{2}(1+x)^{-4} - \frac{1}{8} \cdot (1+x)^{-8}$ &c. Multipliant tous les termes par dx, & intégrant en ajoûtant une conftante C, l'on a l'arc indéfini S$u = x - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (1+x)^{-3}$ $+ \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7}$ &c. $+$ C. Pour déterminer la conftante C, je remarque que l'arc Su doit être $= 0$, lorfque $x = 0$; mais alors la férie devient $- \frac{1}{6} + \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c.; donc C $= + \frac{1}{6} - \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c. & l'intégrale complette eft $x - \frac{1}{2 \cdot 3} \times (1+x)^{-3} + \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7}$ &c. $+ \frac{1}{6} - \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c.

* Car l'équation de l'hyperbole équilatere rapportée aux affimptotes eft $y \cdot x = a^2$; mais alors A$r = x$, & ici l'on fait A$r = 1 + x$.

Si l'on compte les abſciſſes depuis le centre A, & qu'on faſſe ces abſciſſes $= z$, les ordonnées $RS = u$, l'on aura $uz = aa$, $u = aa.z^{-1}$, $du = aa.z^{-2}dz$, (car l'ordonnée u diminuant l'abſciſſe z augmente), & alors l'élément ds de l'arc ſera $= \sqrt{(du^2 + dz^2)}$ $= dz\sqrt{(1 + a^4 z^{-4})} = \frac{dz}{z^2} \times \sqrt{(z^4 + g^2)}$, en faiſant $a^2 = g$, & multipliant la quantité ſous le ſigne par z^4, & diviſant la quantité hors du ſigne par $(z^4)^{\frac{1}{2}} = z^2$.

34. PROBLÈME. *Rectifier la tractrice* AM. (*Fig.* 6.) Soit la tangente $MT = a$, l'ordonnée $PM = y$, l'élément Mm ſera $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mais (13) $dx = \frac{-dy\sqrt{(aa - y^2)}}{y}$; donc $dx^2 = dy^2.\frac{(a^2 - y^2)}{y^2}$, & $Mm = ds = \sqrt{(dy^2.\frac{(aa - yy)}{y^2} + dy^2)} = \sqrt{(a^2.\frac{dy^2}{y^2})}$ $= \frac{a\,dy}{y}$; dont l'intégrale ou l'arc AM eſt $= a\,L.y$. Si ſur BD priſe pour aſſimptote l'on décrit une logarithmique Ab dont la ſous-tangente ſoit égale à la tangente a de la tractrice, que l'on prolonge les lignes MF, mf, juſqu'à la rencontre de la logarithmique aux points s & t, deſquels on abaiſſera les perpendiculaires (à l'aſſimptote) sH, tz qui ſeront égales aux ordonnées PM, pm; on aura $PM = y = sH$, $is = MR = -dy$ (parce que y va en diminuant, tandis que l'abſciſſe augmente.) Je dis qu'en faiſant $BH = x$, l'on a BH égale à l'arc AM; car puiſque la ſous-tangente de la logarithme eſt $= a$, l'on a par la ſection précédente (23) $S.\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, ou (parce qu'on prend ici les x négatives à cauſe que l'ordonnée Hs eſt plus petite que $BA = a$, ou ce qui revient au même, parce que les ordonnées ſituées à la gauche de AB, d'où l'on commence à compter les logarithmes, répondent à des x négatives), $S.\frac{dy}{y} = -\frac{x}{a}$, d'où l'on tire $-x = \frac{a\,S.dy}{y} = a.L.y = AM$; donc $BH = AM$.

35. PROBLÈME. *Rectifier la parabole de l'équation* $y^3 = ax^2$, l'on a $x^2 = \frac{y^3}{a}$, $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx = \frac{3}{2} . \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx^2 = \frac{9}{4a} . y . dy^2$ & l'élément $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$. En intégrant par la regle fondamentale, l'on aura $\frac{dy(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} . \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27} . (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C, je remarque qu'en supposant que A M (Fig. 1re.) désigne la branche qu'on veut rectifier, l'arc A M doit être $= 0$, lorsque $y = 0$; or alors on a $\frac{8a}{27} \times (1)^{\frac{3}{2}} + C$; donc $\frac{8a}{27} + C = 0$, ou $C = -\frac{8a}{27}$, & l'intégrale complette est $\frac{8a}{27}(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Il y a une infinité de paraboles exactement rectifiables. Pour le faire voir, soit l'équation générale des paraboles $y^{m+n} = a^m . x^n$, ou $y = a^{\frac{m}{m+n}} . x^{\frac{n}{m+n}} = cx^u$, en faisant $a^{\frac{m}{m+n}} = c$, & $\frac{m}{m+n} = u$; donc $dy = u . c . x^{u-1} . dx$, $dy^2 = u^2 c^2 . x^{2u-2} dx^2$, $ds =$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(dx^2+uu.C^2x^{2u-2}.dx^2)}$ $=dx\sqrt{(1+u^2c^2x^{2u-2})}$. Cette quantité sera intégrable si $2u-2=1$; parce que la quantité hors du signe sera la différentielle de la quantité sous le signe, en divisant par une constante, ou si l'on veut parce que l'exposant o de x (car $dx=x^0\times dx$) hors du signe, étant augmentée d'une unité sera divisible par l'exposant de la quantité sous le signe & donnera pour quotient un nombre entier positif $=1$. Mais en changeant le signe de l'exposant de x sous le signe, l'on aura $x^{u-1}.dx\sqrt{(x^{-2u+2}+u^2c^2)}$ différentielle qui est intégrable si $(u-1)$ augmenté d'une unité ; c'est-à-dire, si u est exactement divisible par $-2u+2$, & donne pour quotient un nombre entier positif, ou si l'on a $\frac{u}{-2u+2}=p$, nombre entier positif. De cette équation l'on tire $u=2p-2u.p$, $u+2u.p=2p$, $u=\frac{2p}{2p+1}=\frac{n}{m+n}$, ou $2p.m+2p.n=2p.n$ $+n$, $2pm=n$, $m=\frac{n}{2p}$, $m+n=\frac{n}{2p}+n=\frac{(2p+1).n}{2p}$, & l'équation $y^{m+n}=a^m x^n$ devient $y^{\frac{(2p+1).n}{2p}}=$ $a^{\frac{n}{2p}}x^n$, & en tirant la racine n, $y^{\frac{2p+1}{2p}}=a^{\frac{1}{2p}}x$; & toutes les paraboles qui sont comprises dans cette équation, sont exactement rectifiables, en supposant que p désigne un nombre entier positif. Si $p=3$, l'on aura $y^{\frac{7}{6}}=a^{\frac{1}{6}}x$, & la parabole de cette équation sera exactement rectifiable.

36. PROBLEME. *Rectifier la parabole ordinaire dont l'équation est* $y^2=ax$, $2ydy=adx$, $dx=\frac{2ydy}{a}$, $dx^2=$ $\frac{4y^2.dy^2}{a^2}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy}{a}.\sqrt{(a^2+4y^2)}$. En réduisant en série la quantité sous le signe, multipliant ensuite les termes de la série par $\frac{dy}{a}$, & intégrant, l'on aura

l'arc AM (Fig. 1.) $= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}$ &c. Si a étoit plus petit que y, l'on éléveroit $4y^2 + a^2$ à la puissance $\frac{1}{2}$ en prenant $4y^2$ pour le premier terme, & l'on intégreroit après avoir multiplié la série qui en résulteroit par $\frac{dy}{a}$.

Soit supposée décrite l'hyperbole équilatere BN (Fig. 18. A) dont le demi-axe BA soit égal au demi-paramètre $\frac{a}{2}$ de la parabole AM. Par la nature de l'hyperbole équilatere, $y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$, ou $x^2 = y^2 + \frac{a^2}{4}$, $x = \sqrt{(y^2 + \frac{aa}{4})}$; donc en supposant que A est le centre de l'hyperbole, AH le second axe, l'on aura $Af = x = hn = \sqrt{(yy + \frac{aa}{4})}$; car $PM = y = nf$; donc $iN = hH = dy$, & l'élément $hHNn$ de la surface hyperbolique comprise entre la courbe & le second axe (prolongé s'il le faut) est $dy\sqrt{(\frac{aa}{4} + yy)} = \frac{1}{2}dy\sqrt{(aa + 4yy)}$; donc l'espace hyperbolique AHBN divisé par le demi-parametre $\frac{a}{2}$ de la parabole, donne l'arc parabolique correspondant AM; donc la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, réciproquement si l'on avoit l'arc parabolique AM en le multipliant par $\frac{a}{2}$, l'on auroit la quadrature de l'espace hyperbolique correspondant.

37. PROBLEME. *Rectifier un arc d'ellipse* DM. (Fig. 9.) Soit le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx)$ (en comptant les abscisses CP du centre) $= b^2 - \frac{bb}{aa} . x^2$, $2ydy = -\frac{b^2}{a^2} \times 2xdx$, $dy = -\frac{b^2xdx}{a^2y}$, $dy^2 = \frac{b^4x^2dx^2}{a^4y^2} =$ (en substituant pour y^2 sa valeur prise de l'équation de la courbe) $\frac{b^2x^2dx^2}{a^2(aa - xx)}$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)})} = dx\sqrt{(1 + \frac{b^2x^2}{a^4 - a^2x^2})}$. Ré-

ſolvant en ſérie la quantité ſous le ſigne en faiſant dans la formule $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b$ &c. $a=1$, $b = \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}$, multipliant enſuite tous les termes de la ſérie par dx, intégrant, & réduiſant, l'on aura l'arc DM $= x + \frac{b^2 x^3}{6a^4} + \frac{(4a^2 b^2 - b^4)x^5}{40 . a^8} + \frac{(8a^4 b^2 - 4a^2 b^4 + b^6)x^7}{112 a^{12}}$ + &c. Si l'on fait $x = a$ l'on aura le quart d'ellipſe DM $= a + \frac{b^2}{6a}$ + &c.

38. PROBLEME. *Rectifier un arc hyperbolique.* Soit ſuppoſée AM (Fig. 1.) une hyperbole dont le demi-premier axe $= a$, le demi-ſecond axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - aa)$, $dy = \frac{b^2 x dx}{a^2 y}$, $dy^2 = \frac{b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} = \frac{b^2 x^2 dx^2}{a^2 x^2 - a^4}$, en ſubſtituant la valeur de y^2 priſe de l'équation de la courbe; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \times \sqrt{(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 x^2 - a^4})}$, différentielle qu'il ne ſera pas difficile d'intégrer en la réduiſant en une ſérie.

REMARQUE. Si l'on fait $z = x$, cette différentielle ſera $= dz \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{z^2}{z^2 - aa})}$. En ſuppoſant $\frac{bb}{aa} = g$, multipliant & diviſant par $z^2 - a^2$, la quantité ſous le ſigne deviendra $\frac{z^2 - a^2 + g z^2}{z^2 - a^2} = \frac{(g+1) . z^2 - a^2}{z^2 - a^2}$; donc la différentielle ſera $= \frac{dz \sqrt{((g+1) . z^2 - a^2)}}{\sqrt{(zz - aa)}}$; ſuppoſant maintenant $(g+1) . z^2 - a^2 = ax$ *, ou $z^2 = \frac{ax + aa}{g+1}$, on trouve $2z dz = \frac{a dx}{g+1}$, $dz = \frac{a dx}{2z(g+1)} = \frac{a dx}{\sqrt{(g+1)} . 2\sqrt{(ax + aa)}}$, & $\frac{dz \sqrt{((g+1) . z^2 - a^2)}}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$

* x n'exprime pas ici l'abſciſſe de la courbe.

$$=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x+a)}\cdot\sqrt{(x-ga)}}=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\cdot\sqrt{(xx+ax\cdot(1-g)-gaa)}}$$

$$=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\cdot\sqrt{\left(xx+x\left(\frac{aa-bb}{a}\right)-bb\right)}},$$ en remettant la valeur de g. Si l'hyperbole est équilatere, alors $b=a$ & la différentielle devient $=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\cdot\sqrt{(xx-bb)}}$. Si l'on fait $\frac{aa-bb}{a}=\pm p$, la différentielle deviendra $=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\cdot\sqrt{(xx\pm px-bb)}}$. Le signe $+$ a lieu si a est plus grand que b, & le signe $-$ si $b>a$.

S'il s'agit de l'hyperbole rapportée au second axe, l'abscisse sur ce second axe étant z, l'ordonnée étant u, l'on aura $uu=\frac{aa}{bb}\cdot(zz+bb)$ (par la nature de la courbe) $=g\cdot(zz+bb)$, en faisant $\frac{aa}{bb}=g$. L'on aura donc $udu=g\cdot zdz$, & alors l'élément de l'arc hyperbolique sera $=\sqrt{(dz^2+du^2)}$; donc à cause de $du=\frac{gzdz}{u}$ & de $du^2=\frac{g^2z^2dz^2}{u^2}=\frac{gz^2dz^2}{zz+bb}$, cet élément sera $=\frac{dz\sqrt{((g+1)z^2+b^2)}}{\sqrt{(zz+bb)}}$. En supposant $(g+1)\cdot z^2+b^2=bx$, ou $z^2=\frac{bx-bb}{g+1}$, on aura $2zdz=\frac{b\,dx}{g+1}$, & à cause de $z=\sqrt{\frac{bx-bb}{g+1}}$, l'on a $dz=\frac{b\,dx}{2\cdot z(g+1)}=$

$$\frac{b\,dx}{\sqrt{(g+1)}\cdot 2\sqrt{(bx-bb)}}\ \&\ \frac{dz\sqrt{((g+1)\cdot z^2+b^2)}}{\sqrt{(zz+bb)}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{bx}}{2\,.\sqrt{(xx+bx.(g-1)-gbb)}} = \frac{dx\sqrt{bx}}{2.\sqrt{\left(xx+x\,.\left(\frac{a^2-bb}{b}\right)-aa\right)}} = \sqrt{(dz^2+du^2)}.$$

On a trouvé ci-dessus (33.) que la différentielle de l'arc hyperbolique en rapportant la courbe aux assymptotes & faisant $g=aa$, étoit $=\frac{dz}{zz}\sqrt{(z^4+g^2)}$. Si l'on fait $z=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, cette différentielle deviendra $=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx\sqrt{(xx+g^2)}$; car alors $dz=\frac{1}{2}\;x^{-\frac{1}{2}}d\,x$.

L'on a trouvé (37) que l'élément de l'arc elliptique étoit $=\sqrt{(dx^2+\frac{b^2.\,x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)})}$. Si l'on fait $z=x$ & $\frac{b^2}{a^2}=g$, cet élément devient $=dz\sqrt{(1+\frac{g\,.\,z^2}{a^2-z^2})}$ $=\frac{dz\sqrt{(a^2-z^2+gz^2)}}{\sqrt{(aa-z^2)}}=dz.\frac{\sqrt{(g-1).z^2+a^2}}{\sqrt{(aa-z^2)}}$.

En supposant $(g-1)\,.\,zz+aa=ax$, ou $zz=\frac{ax-aa}{g-1}$, l'on aura $2zdz=\frac{adx}{g-1}$, $dz=\frac{adx}{(g-1).2z}=\frac{adx}{\sqrt{(g-1)}.2\sqrt{(ax-aa)}}$, & en faisant l'ordonnée $=u$, l'on aura $\sqrt{(du^2+dz^2)}=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\,.\sqrt{(ax\,.(g+1)-xx-gaa)}}$

$$=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{\left(x.\left(\frac{aa+bb}{a}\right)-xx-bb\right)}}=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(px-xx-bb)}},$$

p étant une quantité positive $=\frac{aa+bb}{a}$. Il faut bien se souvenir que dans ces formules x n'est pas l'abscisse de la courbe.

39. Si l'angle des ordonnées & des abscisses n'étoit pas droit, la formule de l'élément ds seroit différente. Soit (Fig.

14.) l'angle M P N $= z$, en supposant M n parallele aux x $=$ A P, l'angle M $n p$ sera égal à son alterne interne $n p$ N $= z$. Je tire M R perpendiculaire à l'ordonnée $m p$, le triangle rectangle M n R, donne (en faisant le sinus total $= r$) $r : \text{cos}. z :: \text{M}n = dx : n\text{R} = \frac{dx \,.\, \text{cos}. z}{r}$.

Le même triangle donne $(\text{MR})^2 = dx^2 - \frac{dx^2 (\text{cos}. z)^2}{rr}$

Or $\text{R}m = \text{R}n + nm = \frac{dx \text{ cos}. z}{r} + dy$ *, & le triangle rectangle M m R donne $(\text{M}m)^2 = (ds)^2 = (\text{R}m)^2 + (\text{MR})^2$, ou $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 \pm \frac{2 . \text{cos}. z}{r} \times dx dy)}$. Le signe + a lieu lorsque l'angle z est aigu & le signe — si cet angle est obtus.

Si une courbe A B étoit rapportée au foyer C (Fig. 15), en décrivant du point C avec le rayon C B $= y$ l'arc infiniment petit B n, l'on auroit B $b = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, formule dans laquelle il faut éliminer dx qui est un arc décrit d'un rayon variable ; par conséquent on ne peut trouver l'intégrale qu'en chassant dx.

40. PROBLÊME. *Rectifier la spirale d'archimedes* (Fig. 16). En faisant C A $= a$, la circonférence de ce rayon $= c$, l'arc A M $= z$, le rayon CB de la spirale $= y$, l'on aura $az = cy$, $adz = cdy$. Ayant décrit du point C, l'arc infiniment petit B n, l'on aura $\text{M}m = dz : \text{B}n = dx :: a : y$, ou $dx = \frac{ydz}{a}$, $dx^2 = \frac{y^2 dz^2}{aa}$; mais $dz = \frac{cdy}{a}$; donc $dx^2 = \frac{y^2 c^2 dy^2}{a^4}$,

* Si l'angle $x = $ M n R étoit obtus, le point R tomberoit entre n & m & l'on auroit $\text{R}m = dy - \frac{dx \,.\, \text{cos}. z}{r}$.

$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{y^2c^2}{a^4})}$

$= \frac{c}{a^2} . dy . \sqrt{(y^2 + \frac{a^4}{c^2})}$, différencielle qu'on peut facilement intégrer par les séries.

Nous avons trouvé ci-dessus (36.) que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire de l'équation $y^2 = ax$ est $= \frac{dy}{a}\sqrt{(aa + 4y^2)}$, cette quantité est $= \frac{2dy}{a} \times \sqrt{(\frac{1}{4}.aa + y^2)}$, a étant le paramètre; c'est-à-dire, que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire AM (Fig. 1.) est égal à la différentielle dy, divisée par la moitié du paramètre & multipliée par la racine de la somme des quarrés de l'ordonnée & du demi-paramètre; donc (Fig. 16.) si sur CP (perpendiculaire à Cb prise pour axe), l'on décrit avec le paramètre $\frac{2aa}{c}$ la parabole CN, dont CP $= x$, PN $=$ Cb $= y$, CN sera $= \frac{c}{a^2}$S. $dy.\sqrt{(y^2 + \frac{a^4}{c^2})}$; donc l'arc C$fb$ = CN; ainsi la rectification de la spirale d'Archimedes dépend de celle de la parabole ordinaire.

41. PROBLÈME. *Rectifier la spirale hyperbolique* CM (Fig. 17.) soit $= a$, le co-sinus de l'angle du rayon avec la courbe. Dans le triangle rectangle Mmn, l'on a (en faisant le sinus total $= 1$) $a : 1 :: mn = dy : \text{M}m = ds = \frac{dy}{a}$; donc l'arc CM est $= \frac{y}{a}$; mais le triangle rectangle CMT donne $a : 1 :: y : \text{MT} = \frac{1.y}{a} = \frac{y}{a}$; donc l'arc CM est égal à la tangente MT. Si l'angle de la courbe avec son rayon est de 45° degrés, le

triangle rectangle M C T sera isocelle, & l'on aura $MT = \sqrt{2y^2} = y\sqrt{2}$. On peut voir par-là, que quoique la courbe MC fasse une infinité de révolutions autour de C avant de pouvoir parvenir à ce point, cependant sa longueur est égale à une ligne finie MT. Nous supposons le rayon CM fini.

Ayant décrit un cercle d'un rayon $Cs = a$, par le point A ou la spirale coupe le cercle, je tire la ligne indéfinie C D & par le centre C la ligne CB perpendiculaire à CD. Entre les lignes CB, CD comme assimptotes, je décris l'hyperbole FH, dont la puissance soit $= aa$, & du Centre C, je décris l'arc n M D.

Maintenant si on suppose qu'en faisant $As = z$, $Ag = c$ *, l'on ait toujours $z = cLy$ **, l'on aura l'équation de la spirale logarithmique $dz = c.\frac{dy}{y}$. Mais les secteurs semblables Csf, CMn donnent $a : sf = dz :: y : Mn = dx = \frac{y\,dz}{a}$ $= \frac{c}{a}\,dy$, en substituant la valeur de dz; les mêmes secteurs donnent $y : dx = \frac{c\,dy}{a} :: Cs$ $= a : sf = \frac{c\,dy}{y}$; donc l'arc $As = S.\frac{c\,dy}{y}$. Si l'on faisoit $AD = x$ & $AC = b$, l'on auroit

* L'on pourroit supposer l'arc Ag égal à la circonférence du cercle.

** Si l'on fait $z = nL\frac{y}{b}$, on aura encore une autre équation qui appartiendra à une spirale logarithmique.

l'eſpace F A H D $=$ S. $\frac{a\,a\,d\,x}{b+x}$, comme cela eſt évident par ce qu'on a dit ci-deſſus (8); donc ſi on fait C M $=-$ C D $= y$, $b+x$ ſera $= y$, $d\,x = d\,y$ & l'eſpace dont on vient de parler ſera $=$ S. $\frac{a\,a\,d\,y}{y}$. Si l'on multiplie As par a, il vient S. $\frac{c\,.\,a\,.\,d\,y}{y}$, & l'on a l'aire A F H D : a . As : : S. $\frac{a\,a\,d\,y}{y}$: S. $\frac{c\,.\,a\,d\,y}{y}$: : $a : c$; donc AFHD $=$ $\frac{a\,a}{c}$. A s. Suppoſons maintenant que l'arc A L ſoit tel que l'on ait $a : c : :$ A L : A s, l'on aura $\frac{a}{c} = \frac{AL}{As}$; donc l'eſpace hyperbolique A F H D ſera $= a$. A L. Si $a = c$, le point L tombera ſur le point s. Si le point M eſt dans la premiere ſpire * hors du cercle (à compter depuis le point A), l'arc As ſera plus petit que la circonférence; s'il eſt dans la ſeconde ſpire, l'arc A s ſera égal à une circonférence entiere plus un arc moindre que la circonférence; s'il eſt dans la troiſieme, l'arc ſera compoſé de deux circonférences, plus un arc moindre que la circonférence; &c. Il faut dire la même choſe de la branche qui eſt renfermée dans le cercle. On peut voir par-là que ſi l'on connoiſſoit la longueur exacte de l'arc A s, l'on auroit la quadrature de l'eſpace hyper-

* Lorſque z eſt devenue égale à la circonférence, elle devient enſuite égale à une circonférence plus un arc compté depuis l'origine que je ſuppoſe en A, & ſi le point M eſt à l'extrémité de la premiere ſpire hors du cercle, l'arc A s ſera égal à la circonférence, &c.

bolique dont on vient de parler, & qu'il y a une très-grande connexion entre la quadrature de l'hyperbole & celle du cercle.

42. PROBLEME. *Rectifier la développante du cercle.* Soit A B (Fig. 15.) cette développante. Puisque le rayon s B de la développée est toujours perpendiculaire à la ligne de développement, & que, selon ce qu'on a dit ci-dessus(27.), en faisant l'arc A $s = z$ & le rayon CA $= a$, l'arc elémentaire B b sera $= \frac{z\,dz}{a}$, l'intégrale $\frac{z^2}{2a}$ sera $=$ AB. Si z est égale à la circonférence c du cercle, la branche entiere AB sera $= \frac{cc}{2a}$. Donc on aura $2a : c :: c :$ A B, en supposant que A B désigne toute la branche; c'est-à-dire, que le diamètre du cercle est à sa circonférence comme cette circonférence est à la longueur de sa développante; ou, ce qui revient au même, la circonférence du cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre & la développante.

COROLLAIRE I. Donc si on décrivoit un second cercle dont le diamêtre fût égal à la circonférence A p A, la circonférence d'un tel cercle seroit égale à la développante du cercle A p A. Si l'on décrivoit un troisieme cercle dont le diametre fût égal à la circonférence du second, la circonférence de ce troisieme cercle, seroit égale à la développante du second, & ainsi de suite. Si l'on décrit donc tant de cercles que l'on voudra dont les diamètres soient dans une progression géométrique $\div\!\!\div\; a : b : c :$ D $: e : f : g$ &c. De maniere que b soit la circonférence du cercle dont a est le diamètre, c la circonférence du cercle dont b est le diamètre, & ainsi de suite, la circonférence de chacun de ces cercles sera égale à la développante de celui qui le précéde.

COROLLAIRE II. Si on se sert du rapport d'Archimedes pour avoir la circonférence d'un cercle dont le diamètre seroit $= 2a$, l'on aura $7 : 22 :: 2a : c = \frac{2 \cdot 22 \cdot a}{7}$; donc $\frac{cc}{2a}$, ou la développante sera

$$\frac{2 \cdot 22 \cdot a \cdot 2 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot a} = \frac{2 \cdot 22 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7} = (19 + \frac{37}{49}) \cdot a.$$

DE LA CUBATURE DES SOLIDES ET DE LA QUADRATURE DE LEUR SURFACE.

43. Nous considérons ici les solides, comme produits par la révolution d'un plan au-tour d'une ligne que l'on peut appeller *axe de rotation*. Si l'on conçoit que le plan de la courbe AM (Fig. 13.) se meut au-tour de l'axe AP, l'arc de courbe AM engendrera une surface convexe, & le plan AMP un solide. Soit le rapport du rayon à la circonférence égal à celui de $r : c$; l'on aura la circonférence décrite par le rayon PM $= y$ pendant la révolution de la courbe autour de AP, en faisant $r : c :: PM : \frac{c \cdot PM}{r} = \frac{c \cdot y}{r}$. Si l'on multiplie cette circonférence par la moitié du rayon y, l'on aura l'aire du cercle que décrit PM $= \frac{cy^2}{2 \cdot r}$. Multipliant cette surface par $Pp = dx$, l'on aura un cylindre infiniment petit (engendré par le plan PMRp, cylindre qu'on peut regarder comme l'élément du solide cherché) $= \frac{cy^2 dx}{2r}$. Si on substitue dans cette formule la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe ou du plan générateur, & qu'on integre, l'on aura le solide cherché.

Pendant que le plan de la courbe se meut autour de l'axe AP, l'arc infiniment petit MN décrit la surface latérale d'un cône tronqué

dont la hauteur eſt infiniment petite; pour avoir cette ſurface, il faut, ſelon ce qu'on a dit dans la géométrie (104.), multiplier le côté M*M* du cône tronqué par la circonférence qui paſſe par le milieu n du côté de ce cône, ou par la circonférence du rayon bn, qu'on peut ſuppoſer $= PM = y$; or $MM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſera l'élément de la ſurface cherchée. Si on ſubſtitue la valeur de y & de dy, ou bien celle de dx dans la formule que l'on vient de trouver, & que l'on integre, l'on aura la ſurface décrite par la ligne A M.

44. PROBLÊME. *Trouver la ſolidité & la ſuperficie de la ſphere* (Fig. 18). Soit le diamètre $AB = 2r$, l'abſciſſe $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, l'on aura par la nature du cercle générateur A M B N, $y^2 = 2rx - x^2$. Donc la formule $\frac{cy^2dx}{2r}$ devient $= cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$

& $S.\frac{cy^2dx}{2r} = \frac{c}{2r}.S.yydx = \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{3.2r}$.

Donc la portion de la ſphere engendrée par le demi-ſegment APM en tournant autour de l'axe AB

eſt $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r} = \frac{3crx^2 - cx^3}{6r}$. Si l'on ſuppoſe $x = 2r$, la ſphere entiere ſera $=$ $\frac{12.cr^3 - 8.c.r^3}{6r} = \frac{4c.r^3}{6r} = \frac{2}{3}.cr^2 =$ $2cr.\frac{1}{3}r$; or $\frac{cr}{2}$ déſigne un grand cercle de cette ſphere

&

& $2cr$ le quadruple de ce grand cercle; donc la ſolidité de la ſphere eſt égale au quadruple d'un grand cercle de la ſphere multiplié par le tiers du rayon, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la géométrie.

Pour avoir la ſurface, je remarque que l'équation $y^2 = 2rx - x^2$ donne $y = (2rx - xx)^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{dx.(r-x)}{\sqrt{(2rx - xx)}}$, $dy^2 = \frac{dx^2(r-x)^2}{2rx - xx}$. Subſtituant cette valeur de dy^2 dans la formule générale $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & réduiſant, il vient $\frac{cy}{r}.\sqrt{(\frac{r^2dx^2}{2rx - xx})} = \frac{crydx}{r.\sqrt{(2rx - xx)}}$. Si l'on diviſe le numérateur par y & le dénominateur par $\sqrt{(2rx - xx)} = y$, l'on a $\frac{crdx}{r}$, dont l'intégrale eſt $\frac{crx}{r}$. Si l'on fait $x = 2r$ l'on aura la ſurface entiere de la ſphère $= \frac{2r.cr}{r} = 2.rc$; c'eſt-à-dire, la ſurface entiere de la ſphere eſt quadruple de celle d'un de ſes grands cercles.

Si l'on avoit ſuppoſé le diamètre de la ſphère $= 2a$, l'on auroit trouvé S. $\frac{cy}{r}.\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a.cx}{r}$. Si l'on fait $r : c :: a : z = \frac{ac}{r}$, l'on aura la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt a; donc la ſurface d'une calotte ſphérique N A M eſt égale au produit de ſa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la ſphère.

45. PROBLÊME. *Cuber un conoïde parabolique d'un genre quelconque.* Suppoſons le paramètre de la parabole génératrice $= 1$, l'on pourra repréſenter toutes les paraboles par l'équation $x = y^m$; donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, $y^2 = x^{\frac{2}{m}}$. Subſtituant cette valeur de y^2 dans la formule $\frac{cy^2dx}{2r}$, il vient $\frac{cx^{\frac{2}{m}}}{2r}dx$, dont l'intégrale $\frac{m \cdot cx^{\frac{2+m}{m}}}{2r.(2+m)} = \frac{m \cdot cy^2x}{4r+2rm}$ eſt la valeur du ſolide formé par la révolution de la courbe autour de ſon axe. Si on fait $x = a$, & que cette courbe ſoit la parabole ordinaire (Fig. 1ere.), l'on aura $m = 2$; & le paraboloïde ſera $= \frac{2c \cdot y^2a}{8r}$. Si l'on ſuppoſe $y = PM = r$, le conoïde ſera $= \frac{1}{2}cr \cdot \frac{a}{2}$. Or $\frac{1}{2}cr$ repréſente le cercle dont le rayon eſt $= r = PM$; donc le conoïde parabolique du premier genre eſt égal à la moitié d'un cylindre de même baſe & de même hauteur. Si $m = 3$, l'on aura $\frac{1}{2}rc \cdot \frac{3a}{5}$. C'eſt-à-dire, que le conoïde de la parabole de l'équation $y^3 = x$ eſt égal à un cylindre de même baſe, mais dont la hauteur eſt ſeulement les $\frac{3}{5}$ de la hauteur a du conoïde, & ainſi des autres.

46. PROBLÊME. *Trouver la ſurface d'un conoïde formé par la révolution de la demi-parabole ordinaire autour de ſon axe.* Soit ſuppoſée AM (Fig. 1ere.)

la courbe génératrice, dont l'équation soit $y^2 = ax$, l'on aura $adx = 2ydy$, $dx = \frac{2ydy}{a}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{aa}$. Donc en substituant cette valeur de dx^2, l'on aura l'élément de la surface $\frac{cy}{r}.\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{cydy}{ar}\sqrt{(4y^2 + aa)}$. Maintenant si l'on integre cette différentielle par la regle fondamentale *, la surface cherchée sera $= \frac{c}{12.ar}(4y^2 + aa)^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C l'on remarquera qu'en faisant $y = 0$, la surface doit être $= 0$; donc $adx \frac{c}{12.ar}(aa)^{\frac{3}{2}} + C = 0$, ou $\frac{c}{12r}aa + C = 0$, ou $C = -\frac{caa}{12r}$; donc l'intégrale complette est $= \frac{c}{12ar} \times (4y^2 + aa)^{\frac{3}{2}} - \frac{caa}{12r}$.

47. PROBLÊME. *Trouver la solidité d'un conoïde engendré par la révolution de la demi-parabole* AM *autour de la tangente* AB (Fig. 1[ere].). Soit le paramètre $= a$, $Ai = Fn = x$, $in = AF = y$, $FB = dy$. Le cercle décrit avec le rayon

* C'est-à-dire, en augmentant l'exposant $\frac{1}{2}$ d'une unité, divisant par $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, & par la différentielle $8ydy$ de la quantité sous le signe.

FN sera $= \frac{c.xx}{2r}$. Multipliant ce cercle par dy, l'on aura l'élément engendré par le plan BMFn $= \frac{cx^2dy}{2r} = \frac{cy^4dy}{2a^2r}$ (à cause de $x^2 = \frac{y^4}{aa}$, par la nature de la courbe), dont l'intégrale est $\frac{cy^5}{10.a^2r} = \frac{ca^2x^2y}{10.a^2r} = \frac{cx^2y}{10.r}$, en mettant a^2x^2 au lieu de y^4. Si l'on suppose $x =$ AP $= b$, PM $= y = g$, le conoïde engendré par le plan AMB sera $= \frac{cb^2g}{10.r}$.

Mais le cercle dont b est le rayon est $= \frac{cb^2}{2r}$. Si l'on multiplie cette quantité par g, l'on aura un cylindre $\frac{cb^2g}{2r}$, qui sera au solide qu'on vient de trouver comme $\frac{cb^2g}{2r} : \frac{cb^2g}{10.r} :: \frac{1}{2r} : \frac{1}{10r} :: 10r : 2r :: 10 : 2 :: 5 : 1$. Il n'est pas difficile de voir que le conoïde engendré par le plan APM est $= \frac{2cl^2g}{5r}$.

48. PROBLÈME. *Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une hyperbole autour de son axe.* Soit supposée AM (Fig. 12) une hyperbole ordinaire, dont l'équation soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$. Si l'on fait $2a : 2b :: 2b : p$, l'on aura le paramètre $p = \frac{2b^2}{a}$ & $b^2 = \frac{ap}{2}$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$. Ainsi l'équation

sera $y^2 = \frac{p}{2a} \sqrt{(2ax + xx)}$. Si l'on fait le premier axe $= a$, cette équation sera $y^2 = \frac{p}{a} \sqrt{(ax + xx)}$; donc $\frac{c}{2r}$ S. $y^2 dx$ est $= \frac{pc}{2ra} \times$ S. $(axdx + x^2 dx) = \frac{pc}{2ra} . (\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3})$. Si on suppose $x = a$, le conoïde hyperbolique devient $= \frac{c}{2r} . \frac{p}{a} (\frac{5a^3}{6}) = \frac{c.p}{2r} (\frac{5a^2}{6})$. Si l'on fait $r : c :: a : \frac{ca}{r}$, l'on aura la circonférence du rayon a, & multipliant cette circonférence par $\frac{a}{2}$ l'on aura la surface du cercle du rayon $a = \frac{ca^2}{2r}$. Multipliant cette surface par $\frac{5p}{6}$, l'on aura un cylindre dont la hauteur seroit $\frac{5p}{6}$, & ce cylindre sera à un cylindre de même base, mais dont la hauteur seroit $= a$, comme $\frac{5p}{6} : a :: 5p : 6a$. Ainsi un conoïde hyperbolique dont la hauteur est égale au premier axe, est au cylindre de même baze & de même hauteur, comme le quintuple du paramètre du premier axe est au sextuple de cet axe. Si l'hyperbole est équilatere, alors $p = a$ & le conoïde hyperbolique dont la hauteur est égale à l'axe, est au cylindre de même base & de même hauteur comme $5 : 6$.

49. PROBLÊME. *Trouver la surface d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole équilatere autour de son axe.* En faisant le

demi-axe CA $= a$, l'on a $y^2 = x^2 - aa$, en comptant les abscisses CP (Fig. 12) du centre. Donc $y = \sqrt{(xx - aa)}$, $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$; donc $S. \frac{cy}{r}. \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = S. \frac{c\,dx}{ar}. \sqrt{(2aax^2 - a^4)}$ $= S. \frac{cg\,dx}{ar} \left(x^2 - \frac{a^4}{g^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (en faisant $2aa = g^2$ & divisant sous le signe par g^2 & multipliant hors du signe par g) $= S. \frac{cg\,dx}{a.r}. (x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, en faisant $\frac{a^4}{g^2} = \frac{a^2}{2} = b^2$; on pourra intégrer par les séries.

50. PROBLÈME. *Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique produit par le plan* D g A C, *lorsque l'hyperbole* A g *fait sa révolution autour du second axe* C D (Fig. 11). En faisant le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ou $x^2 = \frac{aa}{bb} \times (yy + bb)$. La circonférence du cercle décrit avec le rayon CP $=$ H G est $= \frac{cx}{r}$ & sa surface est $= \frac{cx^2}{2r}$. Si l'on multiplie cette surface par H D $= mg = dy$, l'on aura $\frac{cx^2}{2r} dy$, élément du solide produit par le plan D g H G. Si dans cet élément on substitue la valeur de xx, l'on a $\frac{c.aa}{2r.bb}. (y^2\,dy + bb\,dy)$, dont l'intégrale est

$\frac{caa}{2rbb}\left(\frac{y^3}{3}+bby\right)=\frac{c}{2r}\left(\frac{aa}{3bb}y^3+aay\right)$.

Si l'on ſuppoſe $pg=y=b$, le conoïde devient $=\frac{c}{2r}\left(\frac{a^2b}{3}+a^2b\right)=\frac{c}{2r}\left(\frac{4}{3}a^2b\right)$ $=\frac{ca^2}{2r}\cdot\left(\frac{4}{3}b\right)$. Mais $\frac{ca^2}{2r}$ déſigne la ſurface d'un cercle dont le rayon eſt $=a$; donc le conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole autour du ſecond axe & dont la hauteur eſt égale au demi-ſecond axe b eſt les $\frac{4}{3}$ d'un cylindre de même baze & de même hauteur.

Si du ſolide dont on vient de parler, on retranche le cylindre $CAbD$, on aura le ſolide engendré par le plan bAg.

51. PROBLÊME. *Trouver la ſolidité d'un conoïde hyperbolique engendré par le plan SRmu pendant que l'hyperbole FMS, que nous ſuppoſons équilatere, tourne autour de l'aſſymptote* AR (Fig. 4). Soit l'équation de l'hyperbole équilatere $yx=a^2$ & ſoit auſſi ſuppoſée $AR=RS=a$, l'on aura $y^2=\frac{a^4}{xx}$; donc $\frac{c}{2r}\times$ $S.y^2dx=\frac{c}{2r}\cdot S.\frac{a^4}{x^2}dx=\frac{c}{2r}S.a^4x^{-2}.dx$ $=-\frac{c}{2r}a^4x^{-1}+C$. Pour déterminer la conſtante C, je remarque que le ſolide cherché doit être $=0$, lorſque x eſt $=AR=a$; donc $-\frac{c}{2r}a^3+C=0$, ou $C=+\frac{ca^3}{2r}$, & l'intégrale complette eſt $=\frac{ca^3}{2r}-\frac{ca^4}{2rx}$. Si on ſuppoſe $x=\infty$, ce ſolide devient $=\frac{ca^3}{2r}$. Or $\frac{ca^2}{2r}$ déſigne un

cercle dont le rayon eſt $= a$, & $\frac{ca^2a}{2r} = \frac{ca^3}{2r}$ déſigne un cylindre dont le rayon de la baſe ſeroit $= a$ & la hauteur $= a$, ou un cylindre décrit par la révolution du plan ARST autour de AR ; donc ce cylindre eſt égal au conoïde infiniment long, décrit par le plan RSmu.

52. PROBLÊME. *Trouver le ſolide engendré par le plan* N P a m, *pendant que la logarithmique fait une révolution autour de ſon aſſymptote* Pa (Fig. 5). La ſous-tangente de cette courbe étant ſuppoſée $= a$, l'on aura $\frac{y\,dx}{dy} = a$, $dx = \frac{a\,dy}{y}$; donc $\frac{c}{2r}$ S. $y^2 dx = \frac{c}{2r}$ S. $a\,y\,dy = \frac{c}{2r} \cdot \frac{ay^2}{2} = \frac{cy^2}{2r} \cdot \frac{a}{2}$. Si l'on ſuppoſe que $y = $ PN eſt $= b$, le ſolide produit par l'eſpace infiniment long N $m\,a$ P, ſera $= \frac{cbb}{2r} \cdot \frac{a}{2}$. Or $\frac{cb^2}{2r}$ déſigne la ſurface d'un cercle dont le rayon $= b$; donc ce ſolide eſt la moitié d'un cylindre dont le rayon de la baſe eſt l'ordonnée de la logarithmique, & la hauteur, la ſous-tangente de la logarithmique.

53. PROBLÊME. *Trouver,* 1°. *la ſolidité,* 2°. *la ſurface convexe d'un ſolide formé par un plan* B M b *qui coupe obliquement un cylindre droit, de maniere que la ſection paſſe par le centre de la baſe du cylindre* (Fig. 19). Si l'on conçoit une infinité de

plans M m P, C D a, perpendiculaires à la base de l'onglet, ces plans formeront des triangles rectangles semblables, puisque leurs angles situés sur le diamètre b B perpendiculaire à A a, seront égaux. Par la nature du cercle, en faisant P $m = y$, $b\text{B} = 2a$, l'on a $y^2 = 2ax - xx$. Si l'on fait la hauteur du solide D $a = b$, les triangles semblables C a D, M m P donneront C $a = a$: $a\text{D} = b :: \text{P}m = y : \text{M}m = \frac{by}{a}$. Multipliant M m par $\frac{y}{2}$, l'on a le triangle M m P $=$ $\frac{byy}{2a}$; si l'on multiplie ce triangle par $dx = \text{P}p$; l'on aura l'élément de l'onglet $= \frac{by^2}{2a} \cdot dx =$ $\frac{b}{2a}(2axdx - xxdx)$, dont l'intégrale est $= \frac{b}{2a}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{b}{2a} \times \frac{(3ax^2 - x^3)}{3}$ & lorsque $b\text{P} = x$ est $= 2a$, l'on a la solidité de l'onglet $= \frac{2}{3}aab = aa \cdot \frac{2}{3}b$, c'est-à-dire, que la solidité d'un tel onglet est égale à un prisme dont la base seroit égale au quarré du rayon de la base du cylindre & dont la hauteur seroit les $\frac{2}{3}$ de celle de l'onglet.

Pour avoir la surface, je remarque qu'en multipliant l'arc élémentaire $n\,m$ par m M, l'on aura l'élément de la surface cherchée. En comptant les abscisses du centre l'élément de l'arc circulaire est (31.) $= \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{adx}{y}$. Mais mM est $=$

$\frac{by}{a}$ comme on vient de le voir. Donc l'élément de la surface est $= b\,d\,x$ & la surface cherchée $= b\,x$. Si $x = a$, la demi-surface convexe de l'onglet sera $= b\,a$, & par conséquent la surface entiere sera $= 2\,a\,b$, ou égale au rectangle du diamètre de la base du cylindre & de la hauteur de l'onglet.

54. PROBLÊME. *Soit* AD (Fig. 9) *un quart d'ellipse on demande le rapport des solides produits par la révolution de l'aire* ADC *autour du demi-grand axe* AC $= a$ *& du demi-petit axe* DC $= b$.

Soit CP $=$ M$p = x$, PM $=$ C$p = y$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{aa} \cdot (aa - xx) = bb - \frac{bb}{aa} \cdot x^2$, $x^2 = aa - \frac{aa}{bb} \cdot y^2$; donc le solide produit par la révolution de l'aire elliptique CPMD autour de AC sera $= \frac{c}{2r} \times S.\,y^2 dx = \frac{c}{2r} S. \left(bb\,dx - \frac{bb}{aa} \cdot x^2 dx \right) = \frac{c}{2r} \cdot \left(bbx - \frac{bbx^3}{3aa}\right)$. Si l'on fait $x = a$, le solide décrit par le quart d'ellipse ACD sera $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} b^2 a$. Le solide produit par la révolution du segment CpMA, autour de DC, sera $= \frac{c}{2r}$ S. $x^2 dy$ (parce que ici l'ordonnée pM $= x$, le cercle décrit par cette ordonnée est $= \frac{c}{2r} x^2$ & la différentielle de Cp $=$ PM $= y$ est $= dy$; De sorte qu'il faut changer y en x, &

réciproquement) $= \frac{c}{2r}$ S. ($aady - \frac{aa}{bb} \cdot y^2 dy) =$ $\frac{c}{2r}\left(aay - \frac{aay^3}{3bb}\right)$. Si l'on fait $y = b$, le solide engendré par le quart d'ellipse sera $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} a^2 b$. Donc le premier solide est au second comme b : a. Si $a = b$, le quart d'ellipse deviendra un quart de cercle, & le solide engendré sera un hémisphère $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2a^3}{3}$.

55. PROBLEME. *Trouver la surface décrite par le quart d'ellipse* A D *autour du demi-axe* A C. Selon ce qu'on a dit ci-dessus (38), la différentielle d'un arc elliptique est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{bbx^2dx^2}{aa.(aa-xx)}\right)}$ $= dx\sqrt{\left(1 + \frac{bbx^2}{aa.(aa-xx)}\right)} = \frac{dx\sqrt{\left(aa-xx+\frac{bbxx}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$ $= \frac{dx.\sqrt{\left(aa-xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$; donc $y.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ est $= ydx.\frac{\sqrt{\left(aa-xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$ $= \frac{b}{a}dx.\sqrt{\left(aa-xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}$, en substituant la valeur de $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$; donc $\frac{c}{r}$. S. $y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ $= \frac{cb}{ra}$. S. $dx\sqrt{\left(aa-xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}$: Je prolonge C A en G jusqu'à ce que $AG = \frac{aa}{\sqrt{(aa-bb)}}$ & je

prends $Cb = b$; je décris ensuite avec les demi-axes CG, Cb, l'ellipse Gb. Maintenant faisant $CP = x$, l'ordonnée $Pu = z$, l'on aura $z^2 = \frac{bb}{(GC)^2}(GC^2 - x^2)$; or $(CG)^2 = \frac{a^4}{aa - bb}$; donc $z^2 = bb - x^2 \cdot \frac{(aa - bb) \cdot bb}{a^4}$ $= \frac{bb}{aa} \cdot \left(aa - xx\frac{(aa - bb)}{aa}\right)$; donc multipliant $Pu = z$ par dx, l'on aura l'élément de l'espace $CbPu$, & cet espace sera $= \frac{b}{a} \cdot S. dx \sqrt{\left(aa - xx \cdot \frac{(aa - bb)}{aa}\right)}$; donc en menant l'ordonnée An, $\frac{c}{r} \cdot y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} \cdot S. yds$, sera $= AnBC$; c'est-à-dire, que la surface engendrée par la révolution de AD autour de CA est égale au produit de $\frac{c}{r}$ par la surface $AnbC$.

56. PROBLEME. *Trouver le solide engendré par la révolution de l'aire ABMP pendant la révolution de la tractrice autour de son asymptote* (Fig. 6). Soit l'abscisse $BP = x$, $PM = y$, l'on aura (13) $dx = -\frac{dy\sqrt{(aa - yy)}}{y}$; donc $\frac{cy^2 dx}{2r} = -\frac{cydy\sqrt{(aa - yy)}}{2r}$, dont l'intégrale est $= -\frac{c}{6r} \cdot (aa - yy)^{\frac{3}{2}}$. Comme le signe $-$ ne change point la valeur du solide que nous cherchons, ce solide sera $= \frac{c}{6r} \cdot (aa - yy)^{\frac{3}{2}}$. Si l'on suppose $y = 0$, le solide produit par l'aire infiniment longue de la tractrice sera $= \frac{ca^3}{6r}$. Mais l'hémisphère produit par la révolution du quart de cercle ADB autour du rayon $DB = a$, est, comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (54), $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3 = \frac{ca^3}{r \cdot 3}$; donc cet hémisphère est au solide qu'on vient de trouver, comme $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} :: 6 : 3 :: 2 : 1$.

57. PROBLEME. *Trouver la surface décrite par l'arc AM de la tractrice lorsqu'elle fait sa révolution autour de son as-*

ſymptote BP. Les triangles ſemblables PMT, MRm donnent PM : MT :: MR $= - dy$: M$m = ds$, ou $y : a :: -dy : ds$, ou $-a\,dy = y\,ds$ & $\frac{c}{r} y . ds = \frac{c}{r} y . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = - \frac{c}{r} . a dy$, dont l'intégrale eſt $= - \frac{c}{r}\, a y + C$. Pour déterminer la conſtante, je remarque que la ſurface cherchée doit être $= 0$, lorſque $y = a$; donc $C - \frac{c}{r} a a = 0$, ou $C = + \frac{c}{r} a a$ & l'intégrale complette eſt $= \frac{ca}{r} . (a - y)$. Si l'on fait $y = 0$, cette intégrale eſt $= \frac{caa}{r} = \frac{ca}{r} . a$; c'eſt-à-dire, que la ſurface infiniment longue engendrée par la révolution de la tractrice autour de ſon aſſymptote, eſt égale au produit de la circonférence d'un cercle dont le rayon ſeroit $= a$, multipliée par le même rayon; ou à la ſurface convexe d'un cylindre dont le rayon de la baſe & ſa hauteur ſeroient égaux à la tangente de la tractrice.

58. PROBLEME. *On demande la ſurface engendrée par l'arc cicloïdal* Dn *pendant la révolution de la cicloïde autour de la tangente* DF (Fig. 7). Le diamètre du cercle générateur étant ſuppoſé $= 2a$, l'abſciſſe DP $= x$, la corde DM, moyenne proportionnelle entre le diamètre & l'abſciſſe, ſera $= \sqrt{(2a . x)}$; donc l'arc Dn qui eſt double de cette corde (32) ſera $= 2\sqrt{(2a . x)}$; donc l'élément ni eſt $= \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = ds$. Si l'on fait tourner cet élément autour de DF, il eſt évident que l'on aura l'élément de la ſurface $= \frac{c}{r} . ln . \frac{\sqrt{(2a)}dx}{\sqrt{x}} = \frac{c}{r} . \sqrt{x} . dx \times \sqrt{2a}$ (à cauſe de $ln = $ DP $= x$). Donc en intégrant, la ſurface cherchée ſera $= \frac{c}{r} \sqrt{2a} . \frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3r} . cx . \sqrt{(2a . x)}$. Si x devient $= 2a$,

la surface décrite par la moitié D A de la cicloïde sera $= \frac{8c}{3r}.aa$.

59. PROBLEME. *Que la courbe* AMB (Fig. 20.), *dont on a parlé dans la Premiere Partie de cet Ouvrage,* (Courbes algébriques 119.) *fasse une révolution autour de la ligne* A B, *on demande la valeur du solide de révolution.*

L'équation de la courbe est $y^2 = \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a - x} = -x^2 - aa + \frac{2a^3}{2a-x}$ (en divisant, autant qu'on le peut, par $-x + 2a$), dans laquelle $AB = a$, $AP = x$; donc $y^2 dx = -x^2 dx - aadx + \frac{2a^3 dx}{2a-x}$, dont l'intégrale en ajoûtant une constante est $= C - \frac{x^3}{3} - aax - 2a^3 L.(2a - x)$. Supposons d'abord que cette intégrale devient $= 0$, lorsque $x = 0$; dans ce cas l'on trouve $C = 2a^3 L. 2a$; donc l'intégrale complette ou le solide cherché engendré par l'aire A M P est $= \frac{c}{2r} S. y^2 dx = \frac{c}{2r}.\left(2a^3 L.2a - \frac{x^3}{3} - a^2x - 2a^3 L.(2a-x)\right)$ & faisant $x = a$, le solide engendré par l'aire A M B sera $= \frac{c}{r}\left(a^3 (L.2a - L.a) - \frac{2}{3}a^3.\right)$. Si l'on prend les logarithmes dans une logarithmique dont la soustangente soit $= a$, selon ce qu'on a dit dans la premiere Section, il faudra diviser par a les logarithmes $L\,2a$, $L.a$; donc alors le solide sera $= \frac{c}{r}\left(a^2 (L.2a - L.a) - \frac{2}{3}.a^3\right)$. Et ainsi ce produit ne sera que de trois dimensions. Supposons ensuite que $S.y^2 dx$ est $= 0$, lorsque $x = a$, dans ce cas on aura $C = \frac{4}{3}a^3 + 2a^2 L.a$, en prenant les logarithmes, comme on vient de le dire; donc $S.y^2 dx = \frac{4}{3}.a^3 + 2a^2 L.a - \frac{x^3}{3} - a^2x - 2a^2 L.(2a - x)$, qui étant multipliée par $\frac{c}{2r}$, donnera le solide engendré

par l'aire Bmp. Si l'on fait $x = 2a$, le solide engendré par l'aire infiniment longue BRFD sera $= \frac{c}{r}.(a^2 L.a - a^2 L.o - \frac{5}{3}.a^3)$: ce solide sera infini, parce que le logarithme d'une ordonnée ma (Fig. 5) infiniment petite est infini.

60. PROBLEME. *Trouver l'élément de la surface d'un cône oblique* AfB (Fig. 21). Supposons que ce cône soit coupé par le plan AfB qui passe par un des diamètres de la base sur laquelle, prolongée s'il le faut, tombe la perpendiculaire fF. Prenons un arc infiniment petit mn (élément de l'arc Dm) dont la tangente soit TM, & supposant $CP = x$, $CA = CD = a$, & que l'on a tiré les autres lignes que représente la figure, de manière que FM soit perpendiculaire à TM, il est visible que $\frac{mn.fM}{2}$ représentera l'élément fnm de la surface cherchée; car le plan MfF passant par la ligne fF perpendiculaire au plan de la base, sera perpendiculaire au même plan de la base; mais la tangente TM est perpendiculaire par construction, à MF, commune section du plan de la base & du plan fMF, & de plus TM se trouve dans le plan de la base; donc cette ligne est perpendiculaire au plan fMF, & par conséquent à la ligne fM hauteur du triangle nfm. Soit maintenant $CF = b$, l'angle CnT étant droit, & nP étant une perpendiculaire abaissée du sommet de cet angle, sur l'hypothénuse CT, l'on a $CP : Cn :: Cn : CT$, ou $x : a :: a : CT = \frac{aa}{x}$. Mais $CT : Cn :: TF : MF$, ou $\frac{aa}{x} : a :: \frac{aa}{x} + b : MF = \frac{aa + bx}{a}$. Soit $fF = g$, l'on aura $fM = \sqrt{\left(gg + \frac{(aa+bx)^2}{aa}\right)}$; & parce que l'élément de l'arc circlaire Dm, selon ce qu'on a dit ci-dessus (31), est $= \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, l'élément

fnm sera $= \frac{adx\sqrt{\left(gg + \frac{(aa+bx)^2}{aa}\right)}}{2.\sqrt{(aa-xx)}} =$

$bdx\frac{\sqrt{\left(\frac{gg.aa+a^4}{b^2} + \frac{2aax}{b} + xx\right)}}{2.\sqrt{(aa-xx)}}$; toutes les formules qui pourront être ramenées à celle que l'on vient de trouver, dépendront de la surface du cône oblique.

61. PROBLÊME. *Trouver le solide produit par la révolution de la courbe* AD (Fig. 3) *autour de la ligne* SV *distante de l'axe* DC *de la quantité* p. Il est visible qu'en faisant MN $= y$, l'on aura bM $= p + y$, & qu'en substituant $p + y$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{2r} y^2 dx$, le solide engendré par l'aire SDAV sera $= \frac{c}{2r}$. S. $(y+p)^2 dx$. Mais le solide engendré par le rectangle DCVS est $= \frac{c}{2r}$. S. $p^2 dx$, qui étant retranché du solide qu'on vient de trouver, donnera $\frac{c}{2r}$ S. $(y+p)^2 dx - \frac{c}{2r} \times$ S. $p^2 dx$ $= \frac{c}{2r}$. S. $(y^2 dx + 2pydx)$..... (A) pour le solide engendré par la surface CDA autour de SV.

Soit l'hyperbole équilatere AG (Fig. 11), on demande le solide engendré par le triligne bAg autour de l'axe CB. En faisant $bg = Ap = x$, $pg = y$, l'on auroit $y^2 = 2px + xx$, en supposant le demi-axe CA $= p$. Si l'on change y en x, en faisant $pg =$ CD $= x$ & $bg = y$, l'on

l'on aura $x^2 = 2py + yy$ & $\frac{c}{2r}$ S. $(y^2dx + 2pydx)$ $= \frac{c}{2r}$. S. $x^2\ dx = \frac{c}{2r} \cdot \frac{x^3}{3}$. Ainsi ce solide est égal à un cône dont la hauteur est x & dont le rayon de la base est aussi $= x$, car alors la base est $= \frac{cx^2}{2r}$. L'on peut remarquer qu'ici gm est $= dx$, & que le produit de la surface que décrit n G pendant la révolution par dx, est l'élément du solide cherché.

62. REMARQUE I. Si l'on vouloit avoir le solide engendré par l'aire A B m M (Fig. 13.), comprise entre deux courbes ou les deux branches d'une même courbe, on chercheroit séparément le solide engendré par l'aire A B m P & le solide engendré par l'aire A M P, l'on retrancheroit le second du premier & le problême seroit résolu. Si l'on demandoit le solide engendré par la courbe B m D autour d'une ligne f L, parallele à l'axe A P, l'on chercheroit la valeur générale d'une ordonnée D L, on chercheroit ensuite la valeur du solide engendré par l'aire D m L, en ajoutant une constante qu'on détermineroit par cette condition que l'intégrale s'évanouiroit lorsqu'on auroit A P $= fm = g$, par exemple. On chercheroit ensuite la valeur du solide produit par l'aire fm B, la somme des deux solides donneroit le solide cherché; ôtant l'un de l'autre l'on aura leur différence.

REMARQUE II. Si l'on vouloit la surface décrite par l'arc A g (Fig. 11), autour de la ligne T h, distante de CD, que nous pouvons regarder comme l'axe de la courbe, de la quantité T C $= p$; en faisant D g $= y$, l'on auroit $hg = p + y$, & l'on substitueroit $p + y$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; de sorte que la sur-

face cherchée seroit $= \frac{c}{r} \cdot S. (p + y) \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

REMARQUE III. Si les co-ordonnées DM, AD (Fig. 22) étoient obliques, il y auroit quelque changement dans les formules. Soit l'angle des coordonnées $= z$, $AD = x$, $DM = y$, $DF = p$ & supposons que la courbe tourne autour de l'axe BF parallèle à l'axe AD, on demande la surface qu'engendrera la courbe & le solide que produira l'aire ADM. Ayant tiré ML perpendiculairement à AD, le triangle rectangle MPD, en faisant le sinus total $= r$, donne r : sinus $z :: y : PM = \frac{y \text{ sin. } z}{r}$. L'on a aussi $fD = LP = \frac{p \text{ sin. } z}{r}$; donc $LM = \frac{(p + y) \text{ sin. } z}{r}$; on a encore $PD = \frac{\text{cos. } z . y}{r}$ & $AP = x - \frac{\text{cos. } z . y}{r}$. Si dans la formule $\frac{c}{2r} S. (y + p)^2 dx$ (61) on met $\frac{(p + y). \text{ sin. } z}{r}$ au lieu de $y + p$ & la différentielle de $x - \frac{\text{cos. } z . y}{r}$ au lieu de dx, la formule A (de l'endroit cité) donnera le solide engendré par l'espace AMP autour de $BF = \frac{c}{2r} \cdot \frac{(\text{sin. } z)^2}{r^2} \cdot S. (y^2 + 2py) \times (dx - \frac{\text{cos. } z \, dy}{r})$, auquel il faut ajouter le solide engendré par le triangle PMD; c'est-à-dire $\frac{c}{2r} \cdot \frac{(\text{sin. } z)^2}{r^2} S. \frac{\text{cos. } z . dy}{r} \cdot (y^2 + 2py)$, ainsi que nous le verrons bien-tôt & le solide cherché sera $= \frac{c . \text{ sin. } z^2}{2r^3} \cdot S. (y^2 + 2py) \, dx$

Si l'on suppose $p = 0$, on aura le solide engendré autour de l'axe A P.

Si l'on veut avoir la surface décrite par la courbe AM, on substituera $\frac{\text{sin. } z}{r} \cdot (y + p)$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} y\, ds$, & l'on aura la surface cherchée $= \frac{c \cdot \text{sin. } z}{rr}$. S. $(y + p)\, ds$. Mais ici ds n'est pas $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; mais $ds = \sqrt{(dx^2 - 2 \frac{\text{cos. } z}{r} dy\, dx + dx^2)}$. Si l'angle z étoit obtus, son co-sinus seroit négatif, & l'on changeroit le signe du second terme de la quantité sous le signe, & il est facile de voir quel changement il faudroit faire dans la formule du solide engendré par l'aire AMP. Dans le même cas le solide décrit par le triangle D M P seroit négatif; c'est-à-dire, qu'on le retrancheroit au lieu de l'ajouter.

Si dans la formule A (61), au lieu de y l'on substitue la valeur de P M $= \frac{\text{sin. } z}{r} y$; au lieu de p, la valeur de P L $= \frac{\text{sin. } z}{r} p$; au lieu de dx, la différentielle de $\frac{\text{cos. } z}{r} y$ (parce que P D $= \frac{\text{cos. } z \cdot y}{r}$, & que P p = r m peut être regardé comme la différentielle de P D), & qu'on regarde z comme constant, l'on aura le solide engendré par le triangle MPD $= \frac{c}{2r} \times \frac{(\text{sin. } z)^2}{r^2}$. S. $\frac{\text{cos. } z}{r}$ $dy \cdot (y^2 + 2py)$.

Si la courbe eſt rapportée à un foyer F (Fig. 23), pour trouver le ſolide produit par la révolution de l'aire ARF autour de la ligne GT, parallèle à AF, je cherche le ſolide élémentaire produit par le triangle infiniment petit DRF. Que la révolution ſe faſſe par un arc infiniment petit, le point D décrira l'arc infiniment petit DP & le point F l'arc F b. Dans ce mouvement le triangle élémentaire DFR décrira un ſolide, qui aura pour faces deux triangles & trois quadrilatères. Ce ſolide peut être repréſenté par la Figure 24.

Si par le point b on mene un plan qui paſſe par DR, ce ſolide ſera diviſé en deux pyramides, l'une triangulaire bDRF, l'autre quadrilatère bDRpP. La ſolidité de la premiere eſt égale au produit du triangle FDR, par le $\frac{1}{3}$ de bF. La ſeconde eſt égale au double d'une pyramide qui auroit FDR pour baſe & DP pour hauteur; ce que l'on comprendra aiſément, en concevant le plan bPR qui la diviſe en deux pyramides qui ont même ſommet b, & dont les baſes ſont chacune la moitié du rectangle PpDR; mais d'ailleurs la pyramide bPpR a auſſi pR $=$ PD pour hauteur & le triangle bPp $=$ FDR pour baſe. Donc la ſeconde pyramide eſt les $\frac{2}{3}$ du produit de FDR par DP; donc le ſolide élémentaire eſt $= \text{FDR}.\frac{(\text{F}b + 2.\text{DP})}{3}$;

donc lorſque la révolution ſera entiere, le ſolide élémentaire ſera égal au produit de $\frac{\text{FDR}}{3}$ par la circonférence décrite par F, plus le double de la circonférence décrite par le point D.

Soit FD $= y$, l'arc gh (décrit avec le rayon F$g = a$) $= z$; donc hL $= dz$. Si l'on fait l'arc Dm (décrit du centre F avec le rayon y)

$= dx$, l'on aura $a : dz :: y : dx = \frac{ydz}{a}$. Multipliant cet arc par $\frac{1}{2} y$, l'aire FDm, ou FDR sera $= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 dz}{a}$. De plus le triangle rectangle FBD donne $a : \text{sin.} z :: y : BD = \frac{\text{sin.} z . y}{a}$. Si l'on fait $BG = p$, la circonférence décrite par TF sera $= \frac{cp}{r}$, & la circonférence décrite par le point D autour de GT sera $= \frac{c}{r} . (p + \frac{\text{sin.} z}{a} . y)$, & parce que l'aire FDR est $= \frac{1}{2} y dx$, l'élément produit par cette aire dans une révolution entiere sera $= \frac{1}{2} y dx \times \frac{2}{3} . (\frac{cp}{r} + \frac{2cp}{r} + \frac{2c \text{ sin.} z . y}{ra}) = \frac{2}{2} y dx \times (\frac{cp}{r} + \frac{2c \text{ sin.} z . y}{3r . a})$. Si on substitue $\frac{ydz}{a}$, au lieu de dx, le solide de révolution sera, en supposant $a = r$, sera, dis-je, $\frac{c}{3r} . S. (\frac{3p}{2r} y^2 dz + \frac{y^3 \text{ sin.} z . dz}{r^2})$ Si l'aire AFD tourne autour de la ligne AF, l'on aura $p = 0$, & le solide de révolution sera $= \frac{c}{3r} . S. y^3 \frac{\text{sin.} z . dz}{r^2}$.

Soit Ai (Fig. 3) $= z$ un arc de cercle dont le rayon soit $= r$, les triangles CiH, irl ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables ; donc $Ci : iH :: ir = dz : il = Hh$. Or, Hh est la différentielle du co-sinus de l'arc z & iH est le sinus de z ; donc $r : \text{sinus } z :: dz : - d . \text{co-sinus} = \frac{\text{sin.} z . dz}{r}$. On met le signe $-$, parce que le sinus augmentant, le co-sinus dimi-

nue. Substituant la valeur de $\frac{\text{sin. } z \,.\, dz}{r}$ dans la derniere formule, elle deviendra $= \frac{c}{3r} \times$ S. $-y^3 \frac{d \,.\, \text{cos. } z}{r}$.

63. PROBLÊME. *Supposant que* AD (Fig. 23) *est un arc de cercle dont le rayon* FA *soit* $= r$, *on demande le solide engendré par le secteur* ADF *autour du rayon* AF. Dans ce cas on a FD $= y = r$ & la formule $\frac{c}{3r}$. S. $-y^3 \frac{d \,.\, \text{cos. } z}{r}$ est $=$ $\frac{c}{3r}$. S. $-r^3 \frac{d \,.\, \text{cos. } z}{r} = \frac{cr}{3}$. S. $- d$. cos. z $= \frac{-cr}{3}$. co-sinus $z + C$. Pour déterminer la constante C, je remarque qu'en supposant le co-sinus de $z =$ au rayon, l'arc AD sera $= 0$, aussi bien que le solide de révolution; donc $-$ $\frac{crr}{3} + C = 0$, ou $C = + \frac{cr^2}{3}$; donc le solide cherché est $= \frac{c}{3r} \times (r^3 - r^2 \text{ co-sinus } z)$.

DU CENTRE DE GRANDEUR, OU DU CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES.

64. Si les centres de deux corps sphériques a & b (Fig. 25) sont attachés aux extrémités d'une ligne ab (qu'on peut considérer sans pesanteur & comme inflexible), ces corps seront en équilibre, pourvu que la ligne ou le *levier* ab soit soutenu par un point f tel que l'on ait $a : b :: bf : af$, ou pourvu que les distances de ces corps au point d'appui soient en raison inverse de ces corps; nous considérons ici les corps, comme si toute leur matiere étoit réu-

nie au centre de ces corps. La démonſtration de ce principe, regardé chez les Méchaniciens comme une vérité inconteſtable, ſe trouve dans les Livres les plus élémentaires de Méchanique. Si le corps a péſe une livre, & le corps b deux livres, la diſtance af ſera double de la diſtance fb.

65. PROBLÊME. *Diviſer une ligne $ab = c$ en raiſon de deux quantités a & b.* J'appelle x la partie de la ligne qui répond à la quantité a, $c - x$ ſera la diſtance fb qui répond à b. Par la nature du Problême l'on a $a : b :: c - x : x$; donc $ax = bc - bx$, ou $ax + bx = bc$, ou $x = \frac{b.c}{a+b}$. Donc on trouvera x en faiſant $a + b : b :: c : x$; c'eſt-dire, que la diſtance ou la partie de la ligne qui répond au poids a, ſe trouve en prenant le quatrieme terme d'une proportion dont le premier terme eſt la ſomme des poids, le ſecond eſt le poids b, & le troiſieme la ligne donnée c. L'on aura $c - x = c - \frac{b.c}{a+b} = \frac{ca+cb-bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$; donc $a + b : a :: c : c - x$; c'eſt-à-dire, que l'on trouvera la diſtance de chaque poids au point d'appui, en diſant, la ſomme des poids eſt à un de ces poids, comme la longueur du levier eſt à la diſtance de l'autre poids au point d'appui. Si on ſuppoſe a de trois livres, b de douze livres, & la ligne ab de ſix pieds, la premiere proportion donnera $12 + 3 = 15 : 12 :: 6^{\text{Pieds}} : x = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} = 4^{\text{Pieds}} + \frac{4}{5}$ de pied.

La *maſſe* d'un corps eſt la quantité de matiere qu'il contient. L'on appelle *centre de maſſe*, *centre*

de grandeur, *centre de gravité*, un point par lequel ce corps étant suspendu, il demeure en repos, de quelle maniere que ses autres parties soient situées. Toute ligne horisontale qui passe par le centre de gravité du corps sera appellée *axe d'équilibre*.

Un corps *m* (Fig. 26) suspendu à l'extrémité *a* d'un levier, agit avec d'autant plus de force que la distance de la direction *a m* (de ce corps vers le centre de la terre), au point d'appui *f* est plus grande, & l'on appelle *moment du corps* le produit de la masse de ce corps par la distance *a f* de sa direction *a m* (vers la terre.)

Les distances auxquelles les corps terrestres peuvent agir les uns sur les autres par le moyen des machines sont assez petites pour que l'on considere les directions de ces corps vers la terre comme parallèles ; & la pesanteur des corps sur les plus hautes montagnes & les vallons les plus profonds, étant sensiblement la même, on peut dans la méchanique considérer la pesanteur comme uniforme, lorsqu'il s'agit des corps situés sur la surface ou auprès de la surface de la terre.

66. THÉORÊME. *Si plusieurs corps m, p, R, n sont attachés à une ligne a b, supposée inflexible & sans pesanteur, & que cette ligne soit soutenue ou suspendue par un point f, de maniere que la somme des produits des masses, chacune multipliée par la distance de son point de suspension au point f d'un côté, soit égale à la somme de pareils produits de l'autre côté, ces corps seront en équilibre. Sçavoir, si* $m \cdot af + p \cdot cf = n \cdot bf + R \cdot gf$.

La force du corps *m*, pour faire tourner la ligne *a b* autour du point *f* est d'autant plus grande que la distance *a f* est plus grande, de maniere que

ſi cette diſtance devenoit double ou triple, cette force deviendroit auſſi double ou triple, ainſi qu'il eſt aiſé de s'en convaincre par l'expérience. Cette force eſt auſſi d'autant plus grande que la maſſe du corps m, qui eſt toujours comme le poids de ce corps, eſt plus grande. Donc la force de ce corps par rapport au point f, eſt toujours comme le produit $m \cdot af$; de même la force du corps p eſt toujours comme le produit cf par la maſſe p & ainſi des autres; donc $m \cdot af + p \cdot cf$ exprime la force qui tend à faire tourner la ligne ab d'un côté, & $R \cdot gf + n \cdot bf$, celle qui tend à faire tourner la même ligne du côté oppoſé; donc ſi ces forces ſont égales, il y aura équilibre.

Le point f eſt le *centre commun de gravité des corps* m, p, R, n.

67. Soit maintenant deux maſſes quelconques a & b (Fig. 25) ramaſſées en a & b; & ſuppoſons qu'on ait diviſé (65) ab en f en raiſon inverſe des maſſes a & b. Soit imaginé un plan repréſenté par la ligne MN, ſur lequel on ait tiré des perpendiculaires des points a, f & b. Je dis que l'on aura l'équation $a \cdot aM + b \cdot Nb = (a + b) \cdot fP$. Ayant tiré la ligne hfL parallèle au plan MN & qui rencontre les lignes Ma, Nb, prolongées s'il le faut, les triangles ſemblables bfL, afh, donneront $bf : af :: bL : ah$. Mais par la ſuppoſition $bf : af :: a : b$; donc $a : b :: bL : ah$; donc $a \cdot ha = b \cdot Lb$. Mais $a \cdot ha$ eſt la différence du produit $a \cdot fP$, au produit $a \cdot aM$, & $b \cdot BL$ eſt la différence du produit $b \cdot bN$ au produit $b \cdot fP$; donc on a la proportion arithmétique $a \times Ma \,.\, a \times fP : b \times fP \,.\, b \times bN$; donc $a \times Ma + b \times bN = (a + b) \times fP$.

COROLLAIRE. Donc la somme des produits des quantités a & b, par leurs distances au plan MN, sera égale au produit de la somme des quantités par la distance du point f au même plan ; c'est donc la même chose que si ces quantités étoient ramassées au point f.

68. Ajoutons maintenant une troisieme masse m. Qu'on joigne les points m & f par une ligne qu'on divisera en F de maniere que $a + b : m :: m\text{F} : \text{F}f$; c'est-à-dire, qu'on divisera (65) la ligne fm en raison inverse de $a + b$ & de m, & supposant tirées les lignes mn, FR perpendiculaires au plan M N, je dis que l'on aura $a \times a\text{M} + b \,.\, b\text{N} + m \,.\, nm = (a + b + m) \,.\, \text{FR}$. Si l'on conçoit les masses a & b comme ramassées en f, ou comme une seule masse située en f, selon ce qu'on vient de dire (67), l'on a $(a + b) \times f\text{P} + m \,.\, nm = (a + b + m) \,.\, \text{FR}$. (Ici $a + b$ est regardé comme une seule masse) ; mais l'on a (67) $(a + b) \,.\, f\text{P} = a \,.\, a\text{M} + b \,.\, b\text{N}$; donc $a \,.\, a\text{M} + b \,.\, b\text{N} + m \,.\, nm = (a + b + m) \times \text{FR}$. C'est pourquoi que les trois corps a, b, m soient placés en a, b, m, ou qu'ils soient assemblés en F, la somme des produits de ces corps par leurs distances au plan MN, sera toujours la même.

En suivant la même méthode, on prouvera que si l'on ajoute un quatrieme corps D, & qu'on tire la ligne DF, & qu'on la divise de maniere que l'on ait $a + b + m : \text{D} :: \text{DG} : \text{FG}$, la somme des rectangles, ou, ce qui revient au même, la somme des produits des quatre corps par leur distance au plan, est égale à un seul produit fait de la somme de ces corps, par la distance GS du point G au plan ; & parce qu'on peut prouver

la. même chose pour un nombre quelconque de corps, il est évident que quelque nombre de corps que l'on ait, l'on peut toujours trouver un point tel que le produit de la somme de tous les corps par la distance de ce point à un plan quelconque, soit égal à la somme des produits particuliers de chacun de ces corps par la distance de chacun au même plan. Ce point est appellé le *centre de masse*, le *centre de grandeur*, le *centre de gravité.* Si quelques-uns de ces corps étoient situés de l'autre côté du plau, leurs distances devroient être regardées comme négatives, & les produits de ces corps par leurs distances seroient pris avec le signe —. Si le plan passe par le centre de grandeur, la distance de ce point au plan étant $= 0$, la quantité qui représente la somme du produit de ces corps situés d'un côté, doit être égale à celle qui représente la somme négative des produits de ces corps situés de l'autre côté.

L'équation $a \,.\, aM + b \,.\, bN + m \,.\, nm = (a + b + m) \,.\, FR$, donne $FR = \frac{a \,.\, aM + b \,.\, bN + m \,.\, nm}{a + b + m}$. C'est-à-dire, la distance du centre de gravité F de trois corps à un plan est égale à la somme des rectangles de chacun de ces corps par sa distance au même plan, divisée par la somme de ces corps. Et en général quelque soit le nombre des corps, la distance de leur centre de gravité à un plan, est égale au quotient de la somme des produits, ou rectangles de chacun des corps par leurs distances particulieres, en divisant par la somme des corps: on prendra avec le signe — les produits dans lesquels les distances seront négatives. On peut dire aussi que la

diſtance du centre de gravité d'un ſyſtême de corps par rapport à un plan, eſt égale au quotient de la ſomme des *momens* de ces corps par rapport au plan donné *, diviſée par la ſomme de ces corps.

Mais on peut demander, ſi pour un aſſemblage ou ſyſtême de corps quelconque, ce point qu'on appelle centre de gravité, eſt déterminé & unique. Je dis qu'il eſt unique; en effet, ſi l'on conçoit trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, on trouvera la diſtance du centre de gravité, par rapport à chacun de ces plans, en diviſant la ſomme des rectangles de chacun des corps par leurs diſtances particulieres à chaque plan, en diviſant, dis-je, cette ſomme par la ſomme des corps. Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on mene trois autres plans parallèles aux premiers & à la diſtance trouvée, il eſt viſible que le centre de gravité ſe trouvera dans ces trois plans. Donc il ſera ſitué dans la ſection des trois derniers plans, ſection qui eſt évidemment un point; donc &c.

Lorſqu'il s'agit de lignes, on peut les concevoir comme l'aſſemblage d'une infinité de points peſans. L'on peut auſſi conſidérer une ſurface comme l'aſſemblage d'une infinité de lignes peſantes. Si les centres des corps dont on cherche le centre de

* Le *moment* d'un corps par rapport à un plan, eſt le produit de ce corps par ſa diſtance au plan. Si le corps commençoit à ſe mouvoir en faiſant tourner le plan, ſa viteſſe reſpectivement à un autre corps ſitué ſur la même ligne, ſeroit d'autant plus grande, que ſa diſtance au plan ſeroit plus grande, & ſa force en ſeroit auſſi d'autant plus grande. De plus la force eſt d'autant plus grande que le corps eſt plus grand.

grandeur sont situés dans un même plan, on tirera dans ce plan deux lignes perpendiculaires entre elles, & l'on cherchera la somme des momens de de ces corps par rapport à ces lignes. On divisera ces sommes par la somme des corps; les quotients indiqueront la distance du centre de grandeur par rapport à chacune de ces lignes; donc en tirant deux autres lignes parallèles aux premieres & à la distance trouvée, le centre de grandeur se trouvera dans ces deux lignes, & par conséquent il sera situé dans l'intersection de ces lignes.

La considération du centre de grandeur appartenant à la géométrie, il n'est pas surprenant que nous nous en occupions ici. Nous nous servirons cependant de la dénomination du centre de gravité à cause de l'usage qu'on en pourra faire ailleurs.

69. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'un triangle abc* (Fig. 27). Je tire par le sommet de ce triangle la ligne gb parallèle à la base ac. Je tire aussi la ligne $bf = c$, perpendiculaire à la base & la ligne $bD = a$, qui partage la base en deux également, & supposant les lignes mn, rs parallèles à la base, je fais $ac = b$, $bp = x$, $ip = dx$. A cause des parallèles ac, mn, il est visible que les hauteurs des triangles abc, bmn sont entre elles comme les bases ac & mn; donc $c : b :: x : mn = \frac{bx}{c}$; multipliant mn par dx, l'on aura l'élément $mnrs = \frac{bx}{c} \cdot dx$. Si l'on multiplie cet élément par sa distance x à la ligne bg, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{bx^2dx}{c}$, &

$\frac{bx^3}{3c}$ fera la fomme des momens des élémens du triangle bmn. Si l'on divife cette fomme par celle des élémens, ou par S. $\frac{bxdx}{c} = \frac{bx^2}{2c}$, lé quotient $\frac{2}{3}x$ donnera la diftance du centre de gravité du triangle bmn à la ligne gb. Si l'on fait $x = c$, le centre de gravité du triangle abc fera éloigné de b de la diftance $bp = \frac{2}{3} \cdot c$. Maintenant la ligne bD divifant la bafe ac en deux également, divifera auffi les lignes mn, rs en deux également; donc il eft vifible que cette ligne divife les élémens du triangle en deux également; donc le centre de gravité de ces élémens fe trouve fur cette ligne; mais les triangles femblables bDf, bLp, donnent $bf = c : bp = \frac{2}{3}c :: b$D $= a :$ L$b = \frac{2}{3}a$. Donc fi du fommet d'un angle quelconque d'un triangle, on mène une ligne qui coupe le côté oppofé que j'appelle la bafe du triangle, en deux également, le centre de gravité du triangle fe trouvera fur cette ligne & fera éloigné de la bafe, du $\frac{1}{3}$ de cette ligne.

REMARQUE I. Il eft vifible que le centre de gravité fe trouve fur une ligne ou fur un plan qui partage en deux également les élémens de la figure.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le centre de gravité d'un quadrilatère $abfc$ (Fig. 28), on chercheroit les centres de gravité m, L des triangles bfc, bac, l'on meneroit la ligne mL qu'on diviferoit en P, en raifon inverfe des aires de ces triangles, le point P feroit le centre de gravité cherché.

Si le quadrilatère étoit un parallélogramme, en tirant la ligne RT, par le centre de gravité des bases du parallélogramme, il est visible que cette ligne diviseroit en deux parties égales, les élémens du parallélogramme, & que le centre de gravité se trouveroit au milieu de cette ligne. Ce seroit la même chose, si la figure $a\,b\,c\,f$ étoit un prisme ou un cylindre. L'on voit aussi facilement que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de cette droite.

70. PROBLÊME. *Trouver la distance du centre de gravité d'une demi-parabole* AFD *d'un genre quelconque, par rapport à la tangente* AT *perpendiculaire à l'axe* AF (Fig. 29). L'équation $a^{m-1}x = y^m$ pouvant représenter toutes les paraboles, l'on a en faisant $a = 1$, $x = y^m$, $dx = m.y^{m-1}dy$. Multipliant y par dx, l'on a l'élément de la demi-parabole $= y\,dx$; & multipliant cet élément par sa distance x à la ligne TL, l'on a le moment de cet élément $= yx\,dx = y.y^m m.y^{m-1}dy = my^{2m}dy$, dont l'intégrale $\frac{m}{1+2m}.y^{2m+1}$ divisée par la somme des élémens $S.\,y\,dx =$ $S.my^{m-1}y.dy = S.my^m dy = \frac{m}{m+1}y^{m+1}$ donne $\frac{1+m}{1+2m}.y^m = \frac{1+m}{1+2m}x$, pour la distance demandée. Si l'on fait $AP = AF = a$, l'on aura la distance du centre de gravité de la demi-parabole à la tangente $AL = \frac{1+m}{1+2m}.a$. Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on a $\frac{3}{5}a$ pour la distance cherchée.

Si l'on veut avoir la diſtance du même centre de gravité, par rapport à l'axe AF, on conſidérera que l'élément $pPMi = y\,dx$ a ſon centre de gravité au milieu de $rs = y$; donc en multipliant $y\,dx$ par $\frac{1}{2}y$, l'on aura le moment de cet élément par rapport à l'axe $AF = \frac{1}{2}y^2\,dx = \frac{m}{2}\cdot y^{m+1}\,dy$; donc la ſomme des momens diviſés par la ſomme S. $y\,dx$ des élémens ſera égale à $\frac{m}{4+2m}\,y^{m+2}$ diviſé par $\frac{m}{1+m}\,y^{m+1}$, ou ſera égale à $\frac{1+m}{4+2m}\cdot y$. Si l'on fait $AP = \frac{1+m}{1+2m}\,a$, & la perpendiculaire $PC = \frac{1+m}{4+2m}\cdot FD$, le point C ſera le centre de gravité cherché, il eſt viſible que le centre de gravité de la demi-parabole ABF ſera ſitué en g, en faiſant $Pg = PC$; donc le centre de gravité de la parabole entiere BAD ſera ſitué en P.

71. PROBLÊME. *Trouver la diſtance du centre de gravité du paraboloïde* BAD (*formé par la révolution d'une parabole quelconque autour de ſon axe*), *au ſommet* A (Fig. 29). Si dans la formule $\frac{c}{2r}y^2\,dx$, l'on ſubſtitue la valeur de dx, priſe de l'équation $x = y^m$, l'on aura l'élément du paraboloïde $= \frac{c}{2r}\,m\,y^{m+1}\,dy$. En multipliant cet élément par $y^m = x$, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{m.c}{2r}\cdot y^{2m+1}\,dy$. Diviſant

la

la ſomme $\frac{m}{2+2m}\cdot\frac{c}{2r}y^{2m+2}$ des momens par la ſomme des élémens $\frac{m}{m+2}\cdot\frac{c}{2r}\cdot y^{m+2}$, l'on aura la diſtance cherchée $= \frac{2+m}{2+2m}\cdot y^m = \frac{2+m}{2+2m}x$. Si l'on fait $x = AF = a$, cette diſtance ſera $= \frac{2+m}{2+2m}\cdot a$. Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on aura la diſtance cherchée en prenant $AP = \frac{4}{6}a = \frac{2}{3}a$.

72. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'un ſolide engendré par une demi-parabole ordinaire* ADF *autour de la tangente* TL (Fig. 29). Il eſt viſible que le centre de gravité eſt ſitué ſur la tangente AL *. Soit ſuppoſée $AF = a$, & la circonférence décrite avec ce rayon égale à c, on aura la circonférence décrite avec le rayon $AP = x$, en faiſant $a : c :: x : \frac{c.x}{a}$. Si on multiplie cette circonférence par $PM = y$, l'on aura la ſurface cylindrique décrite par MP pendant la révolution $= \frac{cx.y}{a}$. Si l'on multiplie cette quantité par $Pp = dx$, l'on aura l'élément cy-

* Lorſque le point dans lequel ſe trouve le centre de gravité n'eſt pas un point de la figure, on peut ſuppoſer que le corps ſoit ſuſpendu par ce point, en concevant que ce point eſt attaché au corps par des lignes inflexibles.

lindrique du solide de révolution $= \frac{cxydx}{a}$. L'équation $px = y^2$ de la parabole donnée $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc l'élément du solide est $= \frac{c}{a} \times p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{3}{2}} dx$. Si l'on multiplie cet élément par $\frac{1}{2} . y = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, par la distance de son centre de gravité au cercle décrit par AF, l'on a le moment de cet élément (par rapport à AF) $= \frac{cpx^2 dx}{2a}$. Si l'on divise la somme des momens $\frac{cpx^3}{6a}$, par la somme des élémens $\frac{2cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5a}$, l'on a $\frac{5}{12} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12} y$. Si l'on fait F D $= b$ & $y = b$, & que l'on prenne A L $= \frac{5}{12} . b$, le point L sera le centre de gravité cherché.

73. PROBLÈME. *Supposant que la courbe* BAD (Fig. 29) *est une portion d'ellipse, on demande le centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe* A P. Il est visible que le centre de gravité est situé sur l'axe de la courbe. Si l'on fait le paramètre de la courbe $= p$, le grand axe $= a$, l'abscisse A P $= x$, l'ordonnée P M $= y$, selon ce qu'on a dit dans les Sections-Coniques, l'on a l'équation $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$. Si la courbe étoit une hyperbole, l'on auroit $y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx)$. En faisant A F $= r$ & la circonférence décrite avec le rayon AF

$= c$, l'on aura la circonférence décrite avec le rayon $y = \frac{cy}{r}$, & la surface du cercle auquel appartient cette circonférence $= \frac{cy^2}{2r}$. Multipliant cette surface par dx, l'on a l'élément du solide engendré par le plan APM $= \frac{cy^2 dx}{2r} = \frac{c.p}{2ra} \times (axdx - x^2 dx)$, en substituant la valeur de y^2. Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie cet élément par sa distance AP $= x$ à la ligne Tn, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{cp}{2ra} \times (ax^2 dx - x^3 dx)$, dont l'intégrale $\frac{cp}{2ra} \times \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ sera la somme des momens, qui étant divisée par la somme des élémens, $\frac{cp}{2ra} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, donnera la distance cherchée $=$
$\frac{\frac{a}{3}x - \frac{x^2}{4}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}} = \frac{\frac{4ax - 3x^2}{12}}{\frac{3a - 2x}{6}} = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$, lorsqu'il s'agira du solide engendré par le plan APM; donc on aura cette distance en faisant $6a - 4x : 4a - 3x :: x :$ à la distance cherchée.

74. COROLLAIRE. Si l'on suppose $x = \frac{1}{2}a$, cette distance sera $= \frac{\frac{5}{4}a^2}{4a} = \frac{5}{16}a$. Si $x = a$, cette distance sera $= \frac{aa}{2a} = \frac{1}{2}a$. C'est-à-dire,

que la diſtance du centre degravité d'un demi-ellipſoïde engendré par le plan d'une ellipſe autour de ſon grand axe par rapport à la tangente au ſommet A, eſt égale à $\frac{5}{16}$ de cet axe, & la diſtance du centre de gravité de l'ellipſoïde entier eſt au milieu de l'axe.

75. PROBLÊME. *Si la courbe* BAD *eſt un arc de cercle, on demande la diſtance du centre de gravité du ſolide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe* AP, *par rapport à la ligne, ou ſi l'on veut au plan* T n (Fig. 29). Si l'on fait le paramètre $p = a$, l'équation à l'ellipſe deviendra $y^2 = ax - xx$ qui eſt l'équation du cercle. Donc l'élément $\frac{cp}{2ra}(axdx - x^2 dx)$ qu'on a trouvé dans le problême précédent ſera $= \frac{c}{2r} \cdot (axdx - x^2 dx)$, & le moment de cet élément $\frac{cp}{2ra}(ax^2 dx - x^3 dx)$ ſera $= \frac{c}{2r}(ax^2 dx - x^3 dx)$, & en diviſant la ſomme des momens par celle des élémens, on aura la diſtance cherchée $= \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$. Si l'on fait $x = \frac{1}{2}a$, cette diſtance ſera $= \frac{5}{16}a$, & ſi l'on fait $x = a$, la diſtance deviendra $= \frac{1}{2}a$. Ainſi, ſi une ſphère & un ſphéroïde elliptique ont un même axe, l'hémiſphère & le demi-conoïde elliptique, la ſphère & le ſphéroïde elliptique auront le même centre de gravité.

76. PROBLÊME. *Suppoſant que la courbe* BAD *eſt une hyperbole, dont* AF *ſoit l'axe, on demande la diſ-diſtance à la ligne* T n, *du centre de gravité du ſolide engendré par la révolution du plan* APM *autour de l'axe*

AF(Fig. 29). L'équation à l'hyperbole étant $y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx)$, l'élément du solide de révolution sera $\frac{cp}{2ra}(axdx + xxdx)$, on suppose que AF est le prolongement du premier axe de l'hyperbole, & le moment de cet élément sera $= \frac{cp}{2ra}(ax^2dx + x^3dx)$; donc en divisant la somme des momens par celle des élémens, l'on aura la distance cherchée $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$. Si $x = a$, la distance cherchée sera $= \frac{7aa}{10.a} = \frac{7}{10}.a$.

77. PROBLÈME. *Trouver la distance du centre de gravité d'un arc* M m (Fig. 30), *dont le rayon est* $= a$, *& dont la corde est parallèle à la ligne* TT, *qui passe par le centre du cercle.* Si l'on mene la ligne A B par le milieu de l'arc, & qu'on conçoive les points n & N comme des poids suspendus aux extrémités du levier N n soutenu en i par la ligne A B, il est évident que le centre de gravité des points n & N sera situé sur la ligne A B & ce sera la même chose pour les points M & m & tous les autres points correspondans de l'arc MBm. Soit maintenant l'arc M B $= m$B $= z$, l'on aura $2dz$ pour la différentielle de l'arc donné. Si l'on multiplie cette différentielle par A$i = x$, ou par la distance du centre de gravité des deux élémens situés en n & N, ou si l'on multiplie $2dz$ par x, l'on aura le moment de l'arc MB$m = 2xdz$. Mais (Fig. 3) par la nature du cercle, en faisant CH =

x, $Ci = a$, $Hi = y$, $ir = dz$, les triangles irl, CHi (ſemblables parce que leurs côtés ſont perpendiculaires) donnent $ir = dz : lr = dy :: Ci : CH$; donc $dz = \frac{ady}{x}$, ou $xdz = ady$, $2xdz = 2ady$; donc ſi l'on diviſe la ſomme des momens $S. 2x . dz = S. 2a . dy = 2ay$ par la ſomme des élémens $S. 2dz = 2z$, l'on aura $\frac{2ay}{2z}$ pour la diſtance cherchée.

COROLLAIRE. Donc (Fig. 30) $2z : 2y = Mm :: a : Ai$, diſtance cherchée ; c'eſt-à-dire, un arc eſt à ſa corde, comme le rayon eſt la diſtance du centre de gravité de cet arc au centre du cercle. Si l'arc eſt une demi-circonférence l'on aura la demi-circonférence eſt au diametre comme le rayon eſt à la diſtance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle. Si l'arc eſt la circonférence entiere, alors on a $y = 0$, & $\frac{2ay}{2z} = 0$; c'eſt-à-dire, que le centre de gravité de la circonférence du cercle eſt ſitué dans le centre même du cercle.

78. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide.* Je conçois un plan TT parallèle à la baſe & qui paſſe par le ſommet A de la pyramide (Fig. 31). Je tire la ligne AC par le centre de gravité de la baſe ; il eſt viſible que cette ligne paſſe auſſi par le centre de gravité de la ſection Mfm faite parallèlement à la baſe, & que les plans Mfm, BFD ſont ſemblables. Faiſons donc $AP = x$, $Pp = dx$, $AC = a$, & le plan de la baſe $= b^2$, il eſt clair que les plans Mfm, BFD ſont entre eux comme les quarrés des lignes AP & AC ;

donc $aa : bb :: x^2$: au plan $Mfm = \frac{bbx^2}{aa}$. Multipliant ce plan par dx, l'on aura l'élément de la pyramide $= \frac{bbx^2dx}{aa}$, & multipliant cet élément par x, l'on aura le moment de cet élément (par rapport au plan TT) $= \frac{b^2x^3dx}{a^2}$. Divisant la somme $\frac{b^2x^4}{4a^2}$ des momens, par $\frac{b^2x^3}{3a^2}$, somme des élémens, l'on a $\frac{3x}{4}$ pour la distance du centre de gravité de la pyramide A M f m au plan T T. Si l'on fait $x = a$, la distance du centre de gravité de la pyramide entiere sera $= \frac{3}{4} a$. Prenant donc $AP = \frac{3}{4} a$, le point P sera le centre de gravité de la pyramide. Si la ligne A C n'étoit pas perpendiculaire à la base, on méneroit A c perpendiculairement à cette base, & faisant $Ac = g$, $An = x$, $nL = dx$, on prouveroit facilement que le centre de gravité de la pyramide entiere est éloigné du plan T T de la quantité $An = \frac{3}{4} g$. Si l'on joint ensemble les points c & C, n & P, les triangles semblables A C c, A P n donneront $g : \frac{3}{4} g :: a : AP = \frac{3}{4} a$. Mais le centre de gravité de la pyramide est situé dans la ligne A C qui passe par les centres de tous les élémens; donc il est situé en P.

COROLLAIRE. Donc le centre de gravité d'un cône est situé sur l'axe de ce cône aux $\frac{3}{4}$ de cet axe, à compter depuis le sommet; car le cône

eſt une pyramide dont la baſe eſt circulaire. Ce ſeroit la même choſe ſi la baſe de ce cône étoit une ellipſe, alors on auroit un cône qu'on pourroit appeller *cône elliptique.*

79. PROBLÊME. *Trouver la diſtance du centre de gravité de la ſurface ſphérique* MAN (*produite par la révolution de l'arc* AM *autour du diamètre* AB) *au plan* TT *perpendiculaire au ſommet du diamètre* AB (Fig. 32). Soit le diamètre AB $= 2a$, l'abſciſſe AP $= x$, l'ordonnée PM, ou iL, ou pm (car toutes ces ordonnées étant infiniment proches ſont cenſées égales) $= y$, l'arc infiniment petit Mm ſera (ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus 31) $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Si l'on conçoit que cet arc tourne autour de l'axe, il engendrera une zône dont le centre de gravité ſera ſitué évidemment ſur cet axe, l'élément de la ſurface ſera (43) $= \frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $= \frac{c}{r} y \cdot \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (puiſque Mm $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$) $= \frac{c}{r} \cdot a\,dx \cdot \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, (en ſubſtituant la valeur de y) $= \frac{ca\,dx}{r}$. Si l'on multiplie cet élément par ſa diſtance AP $= x$ au plan TT, le moment de cet élément ſera $= \frac{c}{r}\,a\,x\,dx$. Si l'on diviſe la ſomme $\frac{c}{2r} \cdot ax^2$ des momens par la ſomme $\frac{c}{r} \cdot ax$ des élémens, l'on aura la diſtance cherchée $= \frac{1 \cdot x}{2}$; c'eſt-à-dire, que

la diſtance du centre de gravité d'une ſurface ſphérique MAN, par rapport au ſommet A du diamètre, ſera ſituée au milieu de la hauteur de cette ſurface.

Si l'on comptoit les abſciſſes du centre, & qu'on demandât la diſtance du centre de gravité de la zone MfgN par rapport au centre C, on auroit CP $= x$ & lélément de l'arc du cercle m M $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ (par le N°. 31), $y = \sqrt{(aa - xx)}$, & l'expreſſion de l'élément de la zone ſeroit $\frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} \cdot a \cdot dx$; le moment de cet élément ſeroit $\frac{c}{r} \cdot a \cdot x\,dx$, & la diſtance cherchée $= \frac{\frac{c}{r}\ S.\,a\,x\,dx}{\frac{c}{r}\ S.\,a\,dx} = \frac{x}{2}$. Mais CP $= x$ eſt la hauteur de la zône; donc le centre d'une zone ſphérique, compriſe entre deux plans parallèles, dont l'un paſſe par le centre du cercle générateur eſt au milieu de la hauteur de la zone.

COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir que la diſtance du centre de gravité au centre de la ſphere doit toujours augmenter de la moitié de la hauteur dont la zone augmente; ce qui ne peut être, à moins que le centre de gravité d'une zone quelconque ne ſoit ſitué au milieu de cette zone; car ſuppoſons que la hauteur Cp ſoit d'un pied, la diſtance du centre de gravité de cette zone, par rapport au centre, ſera d'un demi-pied. Si on ajoûte une autre zone dont la hauteur Pp ſoit auſſi d'un pied, la diſtance du centre de gravité de la zone totale ſera

maintenant d'un pied ; donc le centre de gravité de la zone ajoûtée étoit au milieu de cette zone, puisque le centre de gravité des deux zones (égales en surface, parce qu'elles ont même hauteur) se trouve au point qui répond à la jonction des deux zones.

80. PROBLÊME. *Trouver la distance du centre de gravité d'un secteur circulaire* AM*m* (Fig. 30) *par rapport au centre* A *du secteur.* Ayant tiré les rayons A*n*, A*t* infiniment proches du rayon AM, le triangle AM*n* aura son centre de gravité situé sur la ligne A*t* qui divise la base M*n* en deux également ; & cette distance par rapport au sommet A sera $= \frac{2}{3}$ A*t* $= \frac{2}{3} a$, en faisant A*t* $= a$; c'est une suite de ce qu'on a dit ci-dessus (69) ; donc si l'on conçoit le secteur divisé en une infinité de pareils triangles, tous ces triangles auront leur centre de gravité à la même distance du sommet A ; donc si du point A pris pour centre avec un rayon A*b* $= \frac{2}{3} a$, l'on décrit un arc de cercle *bf*, tous les centres de gravité de ces triangles seront situés sur cet arc ; donc le centre *o* de gravité du secteur sera le même que celui de l'arc *bf* ; or nous avons vu (77), qu'on a déterminé le centre de gravité d'un arc en faisant l'arc est à la corde, comme le rayon est à la distance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle ; donc l'arc *b*P*f* : *bf* :: A*b* $= \frac{2}{3} a$: A*o*, distance cherchée.

81. REMARQUE. Il n'est pas difficile de trouver des formules générales pour la distance du centre de gravité des surfaces & des solides de révolution, par rapport à une ligne ou à un axe quelconque. Soit AB l'axe d'une courbe quelconque (Fig. 32), l'élément M*m* de l'arc AM sera $= ds$, en faisant cet arc $= s$, le centre de gravité de l'arc M*m*, sera situé au milieu L de cet arc. La distance L*i* à l'axe

de révolution étant exprimée par y, le moment de cet arc sera $= yds$. Si l'on fait $= u$ la distance $b\,c$ du centre de gravité de l'arc A M à la ligne A B, l'on aura cette distance en divisant la somme $S.\,y\,d\,s$ des momens par la somme $S.\,d\,s$ des élémens, ou par s; donc $u = \frac{S.yds}{s}$. Si la courbe est rapportée à un foyer C, en faisant $CM = y$, l'angle $MCA = x$, le triangle rectangle M C P donne $r : \text{sin.}\, x :: y : MP = \frac{y\,\text{sin.}\,x}{r}$. Multipliant cette quantité par ds, l'on aura le moment de $ds = \frac{y\,\text{sin.}\,x\,.\,d\,s}{r}$; donc $u = \frac{S.y\,\text{sin.}\,x.ds}{r.\,s}$. En déterminant la distance du centre de gravité du même arc par rapport à une autre ligne T T perpendiculaire à la ligne A B, & menant les lignes T b, $b\,c$, parallèles aux lignes A B & A T, & à la distance trouvée, de maniere que T b soit menée à la distance $b\,c = u$ & $b\,c$ à la distance $V = b$ T qui appartient à la ligne A T, le point b sera déterminé par le concours de ces deux lignes.

S'il s'agit de la surface A M P (Fig. 33), en appellant s cette surface, ds sera son élément. Multipliant l'élément P p M m = $d\,s$ par la distance $L\,t = \frac{L\,n}{2} = \frac{y}{2}$, l'on aura le moment de l'aire $= \frac{1}{2}$ S. $y\,d\,s$; donc l'on aura $u = \frac{\frac{1}{2}\,S.\,y\,d\,s}{s}$. Si l'on suppose que les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses, l'élément de l'aire sera $= ydx$; donc dans ce cas u est $= \frac{\frac{1}{2}\,S.\,y^2\,d\,x}{S.\,y\,d\,x}$.

Si la courbe A D est rapportée à un foyer F (Fig. 34), on fera $FM = y$, l'arc M n décrit du foyer $F = d\,x$, l'angle $AFM = V$ & le centre de gravité du triangle $M\,m\,F = \left(\frac{y\,d\,x}{2}\right)$ sera situé en i à la distance $\frac{2}{3}.\,y$ de F (comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus 69); donc en faisant $r : \text{sin.}\,V :: \frac{2}{3}.\,y : \frac{2}{3.\,r}.\,y\,\text{sin.}\,V$, l'on aura la

diſtance Pi du centre de gravité de l'élément de l'aire par rapport à la ligne AF. Si l'on multiplie cette quantité par $\frac{y\,dx}{2}$, l'on aura le moment du triangle FMm = $\frac{1}{3r} \cdot y^2 \cdot \text{ſin. V.}\, dx$; donc en diviſant la ſomme des momens par celle des élémens, l'on aura la diſtance bc du centre de gravité de l'aire entiere $= u = \frac{\frac{1}{3}\, S. y^2 \,\text{ſin. V}\, dx}{\frac{1}{2}\, S. y\, dx}$.

Si l'on fait $r : dV :: y : dx$, l'on aura $\frac{y\,dV}{r} = dx$. Ainſi l'on pourra chaſſer dx de ſa formule précédente. Si l'on veut avoir la diſtance gb du centre de gravité par rapport à une ligne fg parallèle à FA & diſtante de FA de la quantité p, on cherchera la diſtance $u = bc$, & l'on aura $u + p$ pour la diſtance cherchée, ce qui eſt évident.

S'il s'agit d'un ſolide mAM (Fig. 29), appellant s l'élément de ce ſolide, t la diſtance de cet élément à un plan donné de poſition; la diſtance du centre de gravité du ſolide par rapport à ce plan, ſera $= \frac{S. t\, ds}{s}$. S'il s'agit d'un ſolide de révolution, l'on aura $ds = \frac{c}{2r} y^2\, dx$ & $u =$

$$\frac{\frac{c}{2r} \cdot S. y^2\, t\, dx}{\frac{c}{2r}\; S.\; yy\, dx} = \frac{S. y^2\, t\, dx}{S. y^2\, dx}.$$

82. Il faut maintenant donner la fameuſe *Regle de Guldin*, ſelon laquelle, *une quantité quelconque ſituée ſur le même plan que l'axe de révolution produit en tournant une quantité qui eſt égale au produit de la quantité qui tourne par le chemin que parcourt ſon centre de gravité.* Ainſi une ligne engendre une ſurface égale au produit de cette ligne multipliée par l'arc que décrit le centre de gravité de cette ligne, & une ſurface produit un ſolide égal à cette ſurface multipliée par le chemin parcouru par le centre de gravité de la ſurface. Nous allons dé-

montrer cette regle élégante, 1°. Pour les surfaces, & en second lieu pour les solides.

Soit (Fig. 35) la ligne A M $= s$, l'élément M $m = d s$, la distance $f n$ du centre de gravité n de cet élément à l'axe de révolution L $g = y$, le moment de cet élément sera $= y d s$, & la distance L C du centre de gravité de la ligne A M à l'axe L g sera $= \frac{S. y d s}{S. d s} = \frac{S. y d s}{s} = u$. Donc $S. y d s = u s$. Si l'on multiplie les deux termes de cette équation par le rapport $\frac{c}{r}$ de la circonférence au rayon, l'on a $\frac{c}{r} S. y d s = \frac{c}{r} u s = s. \frac{c}{r} u$. Mais $\frac{c}{r}. u$ est la circonférence décrite par le rayon L C $= u$, ou est la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc A M, & $\frac{c}{r} y$, la circonférence décrite par le milieu n de l'élément $d s$, cette circonférence multipliée par l'élément $d s$, donne l'élément de la surface engendrée, laquelle est $= S. \frac{c}{r} y d s$; donc cette surface est égale au produit de la ligne A M multipliée par le chemin que parcourt le centre de gravité de cette ligne.

Soit la surface A D B (Fig. 36) $= s$, son élément b N m M $= d s$, en faisant nP $=$ C L $= y$, & supposant que C est le centre de gravité de cet élément, il est visible que l'on aura $y d s$ pour le moment de cet élément par rapport à l'axe P L; donc la distance du centre de gravité de la surface à l'axe P L, sera $= \frac{S. y d s}{s} = u$; donc $S. y d s = u s$; donc $S. \frac{c}{r} y d s = \frac{c}{r} u s$. Mais $\frac{c}{r} y$ est la circonférence décrite par le point n ou par le point C & $\frac{c}{r} y d s$ est le solide engendré par l'élément m M N b, $S. \frac{c}{r} y d s$ est le solide engendré par la surface s; donc ce solide est $= \frac{c}{r} u s$. Mais $\frac{c}{r} u$ est la circonférence décrite par le centre de gravité de la sur-

face s; donc le ſolide engendré par la ſurface s eſt égal au produit de cette ſurface multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette ſurface.

Dans cette regle on doit remarquer que ſi une partie de la ligne ou de la ſurface qui tourne étoit ſituée de l'autre côté de l'axe de rotation ou ne ſe trouve pas le centre de gravité de la ligne ou de la ſurface, les élémens de cette partie ayant des diſtances négatives par rapport à l'axe de rotation, la ſurface ou le ſolide engendrés par cette partie, doivent être pris négativement; donc la différence des deux parties engendrées, ou des quantités engendrées ſera égale à la quantité qui tourne multipliée par le chemin que parcourt ſon centre de gravité. Si l'axe de rotation paſſe par le centre de gravité les quantités engendrées par les parties ſituées de part & d'autre ſont égales. Si l'on cherche le centre de gravité de chaque partie en particulier, on trouvera facilement la quantité engendrée par chaque partie, & la ſomme des quantités ainſi engendrées.

La Regle de Guldin eſt d'un très-grand ſecours pour la réſolution des problêmes, comme nous l'allons faire voir.

83 PROBLEME. *Suppoſant que les lignes* A, B, D, F, f, *tournent autour de l'axe* R L, *trouver la ſomme des ſurfaces engendrées par ces lignes* (Fig. 37). Ayant joint les lignes B & A par la ligne B A qui paſſe par le milieu de ces lignes, je diviſe la ligne B A au point P en raiſon réciproque des lignes A & B, le point P ſera le centre de gravité de ces deux lignes; tirant par le point P & par le milieu D de la ligne D, la ligne P D, je diviſe cette ligne en p en raiſon inverſe de D & de A + B, le point p eſt le centre de gravité des trois lignes A, B, D. Par le point p & le milieu de F, je mene Fp & je diviſe cette ligne en g, en raiſon réciproque de F & de A + B + D, le point g eſt le centre de gravité des lignes A, B, D, F. Par le milieu de f je mene gf, & diviſant cette ligne en M en raiſon réciproque de f & de A + B + D + F, le point M eſt le centre de gravité des cinq lignes données. Par le point M, je mene la ligne M N parallele à l'axe L R & égale à A + B + D + F + f, la ligne N M, en tournant autour de L R, produira une ſurface égale à la ſomme des ſurfaces que produiroient les lignes A, B, D, F, f.

84. PROBLEME. *L'on a deux figures* P & A B D fg *qui tournent autour de l'axe* R L (Fig. 38), *on demande un solide égal à la somme des solides engendrés par ces figures.* Je cherche (69), le centre de gravité P du triangle P; je divise l'autre figure en triangles & je cherche le centre de gravité particulier de chacun des triangles qui composent la figure. Joignant les centres de gravité s & i des deux triangles A fg, A fD par la ligne si, je divise cette ligne en r en raison réciproque des aires de ces triangles, le point r sera le centre commun de gravité de ces triangles. Supposant que le point b est le centre de gravité du triangle A B D, je tire br & divisant cette ligne en n en raison réciproque du triangle A B D & de la somme des autres triangles, le point n est le centre de gravité des trois triangles qui composent cette figure. Menant la ligne Pn & divisant cette ligne en C en raison inverse des aires des deux figures, le point C sera le centre de gravité des deux figures. Si l'on prend un rectangle L R M m, égal à la somme des aires des deux figures, & tel que son centre de gravité soit situé en C, ce rectangle en tournant autour de L R engendrera un cylindre égal à la somme des solides qu'engendreroient les figures données; il est aisé de voir comment il faudroit s'y prendre si l'on avoit un plus grand nombre de figures.

85. PROBLEME. *Supposant qu'un cercle* A bgf *tourne autour de l'axe* L F, *trouver le rapport des surfaces engendrées par les demi-circonférences* bgf, b A f (Fig. 39). Selon ce qu'on a dit ci-dessus (77), en faisant le quart ce cercle $bg = n$, ou la demi-circonférence $bgf = 2n$, le rayon $= r$, l'on aura $2n : 2r :: r : Cm = \frac{rr}{n}$, distance du centre de gravité de la demi-circonférence bgf au centre C; de même la distance Cp du centre de gravité de la demi-circonférence b A f, au centre du cercle sera $= \frac{rr}{n}$. Faisant F C $= u$, l'on aura F$m = u + \frac{rr}{n}$ & F$p = u - \frac{rr}{n}$. Mais les deux demi-circonférences étant égales, les surfaces engendrées par ces demi-

circonférences sont entr'elles comme les circonférences décrites par les points m & p ; donc la surface engendrée par la demi-circonférence $b\,g\,f$, est à la surface engendrée par la demi-circonférence $b\,A\,f$: : $u + \frac{rr}{n} : u - \frac{rr}{n}$ (car les circonférences des cercles sont dans le rapport de leurs rayons) : : $nu + rr : nu - rr$.

REMARQUE. La regle de Guldin ne suppose pas que la révolution soit entiere & il est aisé de voir qu'elle a lieu également en supposant que la lettre c dans le rapport $\frac{c}{r}$ désigne un arc quelconque de cercle.

86. La regle de Guldin peut aider le calcul intégral, comme on le va faire voir dans les courbes qu'on peut décrire à la maniere de la conchoïde de Nicomède. (Voyez ce qu'on a dit sur cette courbe dans la premiere partie de cet ouvrage, *Courbes Algébriques*, N°. 69) Supposons que A L (Fig. 40), représente une courbe quelconque, hors de laquelle soit situé un pôle C, par lequel passe la ligne C D B qui rencontre la courbe donnée en A, ayant les parties A B, A D égales; que cette ligne se meuve de maniere qu'elle passe toujours par le pôle C & que le point A se trouve toujours dans la ligne A L; les points B & D décriront le premier la courbe B F, le second la courbe D b. Supposons que cette ligne est parvenue dans la situation C F *, & qu'elle prend ensuite une situation infiniment proche C f. Du centre C, je décris les arcs F m, L n, $b\,i$; je fais C A $= b$, D A $=$ A B $=$ L F $=$ L $b = a$, C L $= y$, L $n = dx$. L'espace F $f\,b\,s$ est censé égal à la zone circulaire F $m\,b\,i$, produite par le mouvement de la ligne F $b = 2\,a$ autour du centre C. Mais le centre de cette ligne est le point L qui décrit l'arc Ln; donc cette zone est $= 2adx$; donc l'espace Ffbs est $=$ $2\,a\,d\,x$. Qu'on divise F L en deux également en P & que du

* On peut supposer que la ligne B C s'allonge ou se racourcit du côté du point C, quoique la partie A B $=$ F L soit toujours $=$ A D $=$ L b.

point

point C on décrive l'arc Pp, qui étant à l'arc dx comme $y + \frac{a}{2} : y$, sera $= dx + \frac{adx}{2y}$, donc la zone $FmLn$, & par conséquent aussi l'espace $FfLl$ sera $= adx + \frac{aadx}{2y}$. De même ayant divisé Lb en deux parties égales en g & du point C comme centre ayant décrit l'arc gr, on trouvera l'espace $Llbs = adx - \frac{a^2dx}{2y}$. Ainsi la différence des espaces $FfLl$, $Llbs$ sera $= \frac{a^2dx}{y}$; donc puisque par l'équation de la courbe A L, on peut avoir dx en y & dy, on pourra trouver l'espace compris entre les courbes B F, D b & la courbe A L.

Supposons que la ligne AL est une ligne droite perpendiculaire sur C B, & que le point B décrit la conchoïde supérieure de Nicomède & le point D la conchoïde inférieure. Faisons $AL = RM = t$, l'on aura $CL = y = \sqrt{(bb+tt)}$, $Ll = dt$. Les triangles rectangles CAL, nLl ont les angles nlL, CLA qu'on peut regarder comme égaux (à cause des lignes C L, C l infiniment proches); donc ces triangles sont semblables & donnent $Ln (dx) : Ll = dt :: CA = b : CL = \sqrt{(bb+tt)}$; donc $dx = \frac{bdt}{\sqrt{(bb+tt)}}$. Substituant cette valeur de dx dans $2adx$, l'on a l'espace $Ffbs$ $= \frac{2abdt}{\sqrt{(bb+tt)}} = \frac{4a}{b} \cdot \frac{bbdt}{2\sqrt{(bb+tt)}}$ qui dépend de la quadrature de l'hyperbole. Du point A pris pour centre, avec le demi-axe $AC = b$, décrivez l'hyperbole équilatere C R; selon ce qu'on a dit ci-dessus (21) * le

* En changeant a en b & y en t, le secteur qu'on a trouvé (21) $= S. \frac{aady}{2.\sqrt{(aa+yy)}}$, sera $S. \frac{bbdt}{2.\sqrt{(bb+tt)}}$, & l'élément de ce secteur sera $= \frac{b^2dt}{2.\sqrt{(bb+tt)}}$.

secteur A Ç R sera $= S. \frac{b^2 dt}{2\sqrt{(bb+tt)}}$; donc l'espace B F D b est au secteur A Ç R :: $4a : b$. La différence entre les espaces F s L l, L $l b s$, ayant été trouvée $= \frac{a^2 dx}{y}$, cette différence sera $= \frac{a^2 b dt}{bb+tt} = \frac{a^2}{b} \times \frac{b^2 dt}{bb+tt}$. Mais S. $\frac{b^2 dt}{bb+tt}$ est un arc de cercle dont le rayon est $= b$ & la tangente $= t$ *; donc la différence des espaces ABFL, ALDb, sera au produit de cet arc circulaire mltipliplié par a, comme $a : b$. Puisque la somme des espaces dont on vient de parler, dépend de la quadrature de l'hyperbole, tandis que la différence de ces espaces dépend de la quadrature du cercle, il est visible que chacun des espaces compris entre la ligne A L & les courbes B F & D b dépend à la fois de la quadrature de l'hyperbole & de celle du cercle, car il est visible que le plus grand de ces espaces est égal à leur demi-somme, plus leur demi-différence; le plus petit étant égal à leur demi-somme moins leur demi-différence **.

REMARQUE. Si l'on pouvoit connoître exactement la longueur de la circonférence du cercle, en multipliant cette longueur par le demi-rayon, l'on auroit

* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (31), l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la tangente $= x$, est $= \frac{aadx}{aa+xx}$; donc si le rayon $= b$, & la tangente $= t$, l'élément de l'arc sera $= \frac{b^2 dt}{bb+tt}$.

** On a vu dans la premiere partie de cet ouvrage (voyez *les Equations.*), que des deux quantités, la plus grande est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence, & que la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

l'aire ou la quadrature du cercle ; & si l'on avoit l'aire du cercle en la divisant par le demi-rayon ; l'on trouveroit la circonférence. Il est aisé de voir que la quadrature du cercle dépend de la rectification de sa circonférence. C'est dans ce sens qu'on vient de dire que les espaces dont nous venons de faire mention dépendent de la quadrature du cercle.

DE LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES.

87. J'entends par *Méthode inverse des tangentes*, l'art de trouver l'équation d'une courbe par quelqu'une de ses propriétés, comme par le moyen de sa sous-tangente, sa tangente, sa normale, sa sous-normale, sa quadrature, *&c.* Pour cela on égalera la propriété donnée, ou sa différentielle à l'expression générale de la même propriété exprimée par le moyen du calcul différentiel. L'on tâchera, par le moyen de l'équation qui en résultera, de trouver l'équation de la courbe. Les exemples suivans pourront faire comprendre l'artifice de cette méthode.

88. PROBLÊME. *Trouver la nature de la courbe dont la sous-tangente est* $=\frac{2y^2}{a}$. L'expression générale de la sous-tangente étant $\frac{ydx}{dy}$, l'on aura l'équation $\frac{2y^2}{a}=\frac{ydx}{dy}$, ou $2y^2dy=aydx$, $2ydy=adx$, & en intégrant $\frac{2y^2}{2}=ax$, ou $y^2=ax$, équation à une parabole dont le paramètre est $=a$.

89. PROBLÊME. *Quelle est la courbe dont l'ordonnée* y *est égale à la sous-tangente.* L'on a y

$= \frac{y\,dx}{dy}$, $y\,dy = y\,dx$, $dy = dx$, équation à la cicloïde (Section précédente, note du N° 13). Si l'on avoit un triangle rectangle, isocelle ABD (Fig. 41), en faisant l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée PM $= y$, l'on auroit toujours $y = x$; ainsi l'équation $dy = dx$ qui donne $y = x$, appartient aussi à un triangle rectangle isocelle.

90. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle la sous-tangente est troisieme proportionnelle à* $a - x$ *&* dy. L'on aura $a - x : y :: y : \frac{y\,dx}{dy}$; donc $a\,y\,dx - x\,y\,dx = y^2\,dy$, $a\,dx - x\,dx = y\,dy$. donc, en intégrant, $a\,x - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$, ou $2\,a\,x - x\,x = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre seroit $2\,a$; ainsi la courbe demandée est un cercle, on suppose l'angle des co-ordonnées droit.

91. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle la quantité constante* a *est à l'ordonnée* y *comme* $\sqrt{(a\,a + y\,y)}$ *est à la sous-tangente.* Par la nature du Problême $a : y :: \sqrt{(aa + yy)} : \frac{y\,dx}{dy}$; donc $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{y \cdot \sqrt{(aa + yy)}}{a}$; donc $dx = \frac{dy\sqrt{(aa + yy)}}{a}$, & $x = S.\,\frac{dy.\sqrt{(aa + yy)}}{a}$. Si avec un paramètre $= 2\,a$, l'on décrit une parabole AM (Fig. 1ere), dont l'abscisse, AP $= u$, l'ordonnée PM $= y$, par la nature de la parabole, l'on aura $y^2 = 2\,a\,.\,u$, $u = \frac{y^2}{2a}$, $du = \frac{y\,dy}{a}$, $du^2 = \frac{y^2\,dy}{aa}$. Mais lorsque l'abscisse

A P est $= x$, l'élément M m de l'arc A m est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc lorsque cette abscisse $= u$, l'on aura M $m = \sqrt{(du^2 + dy^2)}$, substituant dans cette expression la valeur de du^2, l'on a M $m = \sqrt{\left(\frac{y^2 dy^2 + aady^2}{aa}\right)} = \frac{dy}{a} . \sqrt{(aa + yy)}$ dont l'intégrale S. $\left(\frac{dy . \sqrt{(aa + yy)}}{a}\right)$ est $=$ A M $= x$. Ainsi la courbe cherchée est telle que si elle a les ordonnées P M d'une parabole, ses abscisses doivent être égales aux arcs A M correspondans à ces ordonnées ; de sorte que sa description dépend de la rectification de la parabole.

92. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la sous-normale est égale à une constante a.* L'expression de la sous-normale étant $\frac{ydy}{dx}$, l'on aura $\frac{ydy}{dx} = a$, $ydy = adx$, $\frac{y^2}{2} = ax$, $y^2 = 2ax$. Ainsi la courbe cherchée est une parabole dont le paramètre est $2a$.

93. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la sous-normale est $= a - x$.* Par la nature du problême $\frac{ydy}{dx} = a - x$, $ydy = adx - xdx$, $\frac{y^2}{2} = ax - \frac{x^2}{2}$, $y^2 = 2ax - xx$. Donc la courbe cherchée est un cercle dont le diamètre est $2a$.

94. PROBLÊME. *Trouver une courbe dont la sous-normale soit $= \frac{ap - 2px}{2a}$.* L'on a $\frac{ydy}{dx}$,

$= \frac{ap - 2px}{2a}$, $2ay\,dy = ap\,dx - 2px\,dx$, $ay^2 = apx - px^2$, ou $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$ équation à une ellipse dont l'axe des x est $= a$, le paramètre de cet axe étant $= p$.

95. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la sous-normale* $= \sqrt{ax}$. Donc $\frac{y\,dy}{dx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $y\,dy = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, $\frac{y^2}{2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \times a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, $y^2 = \frac{4}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{ax} = \frac{2}{3} x \sqrt{4ax}$. Sur l'axe AP (Fig. 42), je décris une parabole AM avec un paramètre $= 4a$, & & supposant l'ordonnée PM $= u$, l'abscisse AP $= x$, par la nature de la parabole, l'on a $u^2 = 4a \cdot x$, $u = \sqrt{4a \cdot x}$. Si donc on cherche une moyenne proportionnelle Pm entre l'ordonnée u de la parabole, & $\frac{2}{3} x$, en faisant P$m = y$, l'on aura $y^2 = \frac{2}{3} x \sqrt{4ax}$. Si l'on fait la même chose pour chacune des ordonnées de la parabole, l'on aura la courbe Am, qu'on peut appeller quadratrice de la parabole. Car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (4), l'aire parabolique APM est $\frac{2}{3} yx$, en faisant PM $= y$. Donc lorsqu'on fait PM $= u$, cette aire sera $= \frac{2}{3} xu = \frac{2}{3} x \times \sqrt{4ax}$; donc la courbe A m est telle que les quarrés de ses ordonnées sont égaux aux aires paraboliques correspondantes.

96. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la normale est constante & $= a$.* L'expression générale de la normale étant $\frac{y}{dx} . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura $a = \frac{y}{dx} . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $a\,dx = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $a^2 dx^2 = y^2 dx^2 + yy\,dy^2$, $a^2 dx^2 - y^2 dx^2 = y^2 dy^2$, $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{aa - yy}$. $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$, $-dx = -\frac{y\,dy}{\sqrt{(aa - yy)}} = -y\,dy . (aa - yy)^{-\frac{1}{2}}$; donc en intégrant, $-x = (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, $x^2 = aa - yy$, $y^2 = aa - xx$, équation à un cercle dont le rayon $= a$.

97. PROBLÊME. *Trouver une courbe dont l'aire soit $= ay$.* L'élément des aires est, selon ce qu'on a dit ci-dessus (2), est $= y\,dx$; donc si l'on différencie l'aire donnée l'on aura $a\,dy = y\,dx$, $\frac{y\,dx}{dy} = a$, équation différentielle d'une logarithmique dont la sous-tangente $= a$, section précédente (21); ainsi la courbe cherchée est une logarithmique.

98. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont l'aire $= a\sqrt{(aa + xx)}$.* Donc $y.dx = a\,x\,dx \times (aa + xx)^{-\frac{1}{2}}$, $y = \frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}}$. Pour tracer cette courbe je décris une hyperbole équilatere (Fig. 43), dont le demi-axe CA soit $= a$.

en faisant $CP = DM = x$, $CD = PM = y$, par la nature de l'hyperbole équilatere, l'on aura $y^2 = x^2 - aa$, ou $x^2 = y^2 + aa$. Si au lieu de faire $CP = x$, l'on faisoit $CP = u$, l'on auroit $u^2 = y^2 + a^2$, $u = \sqrt{(aa + yy)} = \sqrt{(aa + xx)}$, en faisant $PM = x$. Si donc on cherche une quatrieme proportionnelle aux lignes $CP = DM$, CA, PM; ou si l'on fait $\sqrt{(aa + x^2)} : a :: x : Pm = \frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}}$, le point m ainsi trouvé appartiendra à la courbe Am cherchée.

99. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont l'aire est* $= \frac{x^3}{3a}$. Comparant l'élément de cette aire avec ydx, on trouvera $\frac{x^2}{a} dx = ydx$, $x^2 = ay$; donc si l'on prend sur la tangente AF (Fig. 1[ere]), les abscisses $AB = x$, & qu'on fasse $BM = AP = y$, l'on aura $(PM)^2 = x^2 = a.y$. Ainsi l'équation trouvée appartient à une parabole en prenant les abscisses sur la tangente & les ordonnées parallèlement à l'axe.

100. PROBLÊME. *Trouver la courbe qui, par sa revolution autour de son axe, a produit le solide* $\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r}$. Si l'on prend la différentielle de ce solide & qu'on le compare avec l'élément $\frac{cy^2dx}{2r}$ (43), l'on aura $cxdx - \frac{cx^2dx}{2r} =$

$\frac{cy^2 dx}{2r}$, $x - \frac{x^2}{2r} = \frac{y^2}{2r}$, $2rx - x^2 = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre $= 2r$.

101. PROBLÊME. *Trouver la courbe génératrice du solide* $= \frac{cax^2}{4r}$. Par la nature du problême, l'on a $\frac{caxdx}{2r} = \frac{cy^2dx}{2r}$, $ax = y^2$. Donc la courbe cherchée est une parabole dont le paramètre $= a$.

102. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont l'aire est* $= 4a\sqrt{x}$. L'on aura $ydx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot ax^{-\frac{1}{2}} dx$, $y = 2ax^{-\frac{1}{2}}$, $y^2 = 4a^2x^{-1}$, $4a^2 = y^2x$, ou en faisant $4a^2 = 1 \cdot 4a \cdot a = p^3$, $p^3 = y^2x$, équation qui appartient à une courbe hyperbolique.

103. PROBLEME. *Trouver la courbe dont la sous-tangente est* $= \frac{1}{1 + L.x}$, L *désigne la logarithmique hyperbolique.* L'on aura $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{1 + L.x}$, $ydx = \frac{dy}{1 + L.x}$, $dy = (1 + Lx).ydx$, $\frac{dy}{y} = dx + Lx.dx$, $S.\frac{dy}{y} = L.y = xL.x$ (car la différentielle de $xL.x$ est $= dx + L.x \times dx$), $y = x^x$, équation à une courbe exponentielle.

104. PROBLEME. *Trouver l'équation de la courbe dont la sous-normale est* $= y^2.(1 + L.x)$. Par la nature du problême, $\frac{ydy}{dx} = y^2(1 + L.x)$, $\frac{dy}{y} = dx + L.xdx$, $L.y = xL.x = L.x^x$, $y = x^x$.

105. PROBLEME. *Trouver l'équation de la courbe dont la sous-tangente est constante* & $= \frac{1}{L.a}$. Donc $\frac{ydx}{dy} =$

$\frac{1}{L.a}, y\,dx = \frac{dy}{L.a}, dx.L.a = \frac{dy}{y}$, $x\,L.a = L.y$, ou $a^x = y$, équation d'une logarithmique dont la soustangente $= \frac{1}{L.a}$.

106. PROBLÈME. *Trouver l'équation de la courbe dont la somme de la sous-normale & de l'abscisse est constante & $= a$.* L'on aura $\frac{y\,dy}{dx} + x = a$, $y\,dy + x\,dx = a\,dx$, $\frac{yy}{2} + \frac{x^2}{2} = ax$, $y^2 + x^2 = 2ax$, $y^2 = 2ax - xx$, équation au cercle.

107. PROBLÈME. *Trouver la courbe dans laquelle la différence de la sous-normale & de l'abscisse est constante & $= a$.* Donc $\frac{y\,dy}{dx} - x = a$, $\frac{y\,dy}{dx} = a + x$, $y\,dy = a\,dx + x\,dx$, $\frac{y^2}{2} = ax + \frac{x^2}{2}$, $y^2 = 2ax + x^2$, équation à une hyperbole équilatere dont l'axe $= 2a$.

108. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-normale est à la soustangente, comme labscisse est à une ligne constante $= a$.* Donc $\frac{y\,dy}{dx} : \frac{y\,dx}{dy} :: x : a$, ou $dy^2 : dx^2 :: x : a$; donc $a\,dy^2 = x\,dx^2$, $a^{\frac{1}{2}}dy = x^{\frac{1}{2}}dx$, $a^{\frac{1}{2}}y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $ay^2 = \frac{4}{9}x^3$, équation à la seconde parabole cubique.

109. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-tangente est à l'abscisse en raison donnée de $m : 1$.* Donc $\frac{y\,dx}{dy} : x :: m : 1$.

$\frac{y\,dx}{dy} = mx$, $y\,dx = mx\,dy$, $y\,dx - mx\,dy = 0$. Divisant cette équation par y^{m+1}, il vient $\frac{y\,dx - mx\,dx}{y^{m+1}} = 0$, dont l'intégrale est $\frac{x}{y^m} + C = 0$, ou $\frac{x'}{y^m} = -C$. La constante C étant ici arbitraire, je puis la déterminer comme je veux, pourvu qu'il en résulte l'équation d'une courbe; ainsi je fais $-C = \frac{1}{a^{m-1}}$, & l'équation de la courbe est $\frac{x}{y^m} = \frac{1}{a^{m-1}}$, ou $a^{m-1}x = y^m$, équation aux paraboles de tous les genres, si m est un nombre positif, & aux hyperboles de tous les genres si m est un exposant négatif.

110. PROBLEME. *Trouver la nature de la courbe dont la tangente est constante & $= a$.* La formule générale de la tangente (voyez la section premiere), est $= \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$; donc $a = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ou $aa\,dy^2 = y^2(dx^2+dy^2)$; donc $dx^2 . y^2 = (aa-yy)\,dy^2$, $dx^2 = \frac{dy^2(aa-yy)}{y^2}$, $dx = \pm dy . \frac{\sqrt{(aa-yy)}}{y}$, équation de la tractrice.

REMARQUE. Cette courbe est transcendante, car on ne peut exprimer par les méthodes de l'algèbre finie, le rapport qu'il y a entre ses co-ordonnées. Cependant on peut exprimer ce rapport par l'équation $x = S \pm dy . \frac{(aa-yy)}{y}$. Les courbes transcendantes, dont on a parlé dans la pre-

miere partie de cet ouvrage, peuvent être appellées *courbes transcendantes de la premiere espece*; & nous appellerons *transcendantes de la seconde espèce* les courbes dont on ne peut indiquer la nature que par une équation qui renferme quelque signe S d'intégration, la quantité qui est sous ce signe ne pouvant être intégrée algébriquement, ni par les logarithmes.

111. PROBLEME. *Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point, & dont la sous-tangente soit constante & $=-c$.* La formule des sous-tangentes de ces sortes de courbes est (voyez la Section précédente) $\frac{y\,dx}{dy}$; donc $\frac{y\,dx}{dy} = -c$. Mais si l'on suppose que l'on fasse $a : dz :: y : dx$, l'on a $dx = \frac{y\,dz}{a}$ (z étant un arc de cercle décrit d'un rayon constant $= a$); donc en substituant, $\frac{y^2\,dz}{a\,dy} = -c$, $dz = -acy^{-2}\,dy$, $z = +acy^{-1}$, $zy = ac$, équation à la spirale hyperbolique. Dans la section premiere (30), on a eu pour cette spirale $yx = cr$, en supposant x un arc de cercle décrit d'un rayon constant $= r$; donc si on change x en z & r en a, l'on aura $zy = ac$.

112. PROBLEME. *Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point, & dans laquelle la sous-normale* $\frac{y\,dy}{dx}$ (voyez la Section précédente), *soit constante & $=b$.* L'on aura $\frac{y\,dy}{dx} = b$, $y\,dy = b\,dx$. Substituant la valeur $\frac{y\,dz}{a}$ de dx, l'on a $y\,dy = \frac{b}{a} y\,dz$, $a\,dy = b\,dz$, $ay = bz$. Si l'on suppose que a est égal à une circonférence c de cercle, que b est égal au rayon r de cette circonférence, & z un arc de cette même circonférence, en changeant a en c & b en r, l'on aura $cy = rz$ équation à la spirale d'Archimèdes.

113. PROBLEME. *Supposant une infinité de paraboles* AM, A*m du même ordre, mais dont les paramètres soient différens, trouver une courbe* B*i*M, *qui les coupe toutes perpendicu-*

lairement (Fig. 44). Supposant la chose faite, je mène les lignes Mt, tn tangentes de la courbe BM & par-conséquent perpendiculaires aux courbes AM, Am. La sous-tangente des paraboles représentées généralement par $a^m x^n = y^{m+n}$ est (section précédente 10) $= \frac{(m+n)}{n} x$, en faisant AP$=x$; mais la sous-tangente PT est la sous-normale de la courbe BM au point correspondant à l'abscisse x; & cela a lieu également pour toutes les paraboles AM, Am, &c. qu'on pourroit tracer. Il ne s'agit donc plus que de trouver la courbe BM dont la sous-normale soit $= \frac{m+n}{n} x = \frac{p}{n} x$, en supposant $m+n=p$. Mais cette sous-normale étant prise dans un sens opposé à la sous-normale Pt de la parabole AM, nous la ferons négative; Ainsi il faudra chercher la courbe dans laquelle la sous-normale soit $= -\frac{p}{n} x$. L'on aura donc $\frac{ydy}{dx} = -\frac{p}{n} x$, $y\,dy = -\frac{p}{n} xdx$, $ydy + \frac{p}{n} xdx = 0$. En intégrant & faisant attention que la différentielle d'une constante C est $=0$, nous pourrons faire $\frac{y^2}{2} + \frac{p}{2n} x^2 = C$. Supposant C$=aa$, l'on aura $\frac{y^2}{2} = aa - \frac{p}{2n} xx$, ou $(PM)^2 = y^2 = 2.aa - \frac{p}{n} xx$, ou $\frac{n}{p} y^2 = \frac{2n.aa}{p} - xx$, équation à une ellipse dans laquelle le quarré du demi-axe sur lequel on prend l'abscisse x est $= \frac{2n}{p}. aa$. Si l'on fait $p : 2n :: a : g$, l'on aura $\frac{2na}{p} = g$, & faisant $g.a = bb$, l'on aura $\frac{2n.aa}{p} = b^2$; & l'équation de la courbe sera $\frac{n}{p} y^2 = bb - xx$, ou $y^2 = \frac{p}{n}.(bb - xx)$, dans laquelle le rapport de $p:n$ est le même que celui du quarré de l'autre demi-axe de l'el-

lipse au quarré bb; ainsi la courbe cherchée est une ellipse.

Si $m = n = 1$, l'on aura $p = 2$, l'équation des paraboles sera $ax = y^2$, & l'équation $y^2 = \frac{p}{n}(bb - xx)$ deviendra $y^2 = \frac{2}{1}.(bb - xx)$. Ainsi une ellipse B M qui aura son axe sur la même ligne qu'une infinité de paraboles du premier genre qui ont le même sommet A (qui est le centre de l'ellipse), dans laquelle bb est le quarré de la moitié de l'axe des x, le quarré de l'autre demi-axe étant à bb comme $2:1$, ou dans laquelle le paramètre de l'axe $2b$ est à cet axe, comme $2:1$, coupera toutes ces paraboles à angles droits.

REMARQUE. Lorsqu'une différentielle est égale à o, & qu'on peut l'intégrer, on doit ajouter une constante; cette constante, si elle existoit, a nécessairement disparu dans la différenciation. Lorsque cette constante est arbitraire, il est de l'industrie du Géomètre de l'exprimer, de maniere qu'il en résulte la solution la plus simple du problême proposé; & s'il s'agit d'une courbure, il faut faire ensorte que la constante soit homogène aux termes de l'intégrale.

114. PROBLEME. *Supposant une infinité d'hyperboles dont l'une soit* aM (Fig. 45), *qui ayent les mêmes assymptotes perpendiculaires l'une à l'autre, & dont les abscisses soient* AP (on suppose l'angle MPA des co-ordonnées droit), *trouver une courbe* BM, *qui les coupe toutes à angles droits.* La courbe BM sera donc perpendiculaire à la tangente MT, & PT sera la sous-tangente de la courbe aM. Or la sous-tangente d'une hyperbole quelconque, est (comme on l'a dit section précédente 10), égale au quotient de l'exposant de l'ordonnée divisé par celui de l'abscisse, en prenant l'exposant de l'abscisse avec le signe —; donc en prenant l'équation générale des hyperboles $a^{m+n} = y^m x^n$, la sous-tangente PT sera $= -\frac{m}{n}x$. Mais PT est la sous-normale de la courbe BM respectivement à laquelle elle est positive, parce qu'elle va du côté où doivent aller les sous-perpendiculaires de BM par

rapport à l'origine B de la courbe. Le problême consiste donc à trouver une courbe B M, dont la sous-normale soit $=\frac{m}{n}x$; l'on aura donc $\frac{ydy}{dx}=\frac{m}{n}x$, ou $ydy=\frac{m}{n}xdx$, $\frac{m}{n}xdx-ydy=0$, $\frac{m}{n}.\frac{x^2}{2}-\frac{yy}{2}=C=aa$, ou $\frac{n}{m}y^2=x^2-\frac{2n}{m}aa$. Donc la courbe cherchée est une hyperbole rapportée au premier axe, & le terme $\frac{n}{m}y^2$ fait connoître que le premier axe doit être à son paramètre, comme $n:m$. Si l'on fait $m=n=1$, l'équation $a^{m+n}=y^m x^n$ deviendra $a^2=yx$, & l'équation ci-dessus sera $y^2=x^2-2aa=xx-bb$, en prenant b moyenne proportionelle entre a & $2a$. Cette équation appartient à une hyperbole équilatere dont l'axe est $=2b$. Donc si BMm est cette hyperbole, que A soit son centre, $AB=b$, la moitié de son axe, Bm, coupera à angles droits toutes les hyperboles du premier genre dont les équations $xy=a^2$, $xy=(a')^2$, $xy=(a'')^2$, &c. ne different entr'elles que par rapport à la puissance, & qui sont rapportées aux mêmes assymptotes perpendiculaires l'une à l'autre.

115. PROBLEME. *Trouver une courbe* BM (Fig. 13), *rapportée à des co-ordonnées perpendiculaires, dans laquelle en faisant* $BA=a$, *l'aire* A P m B *soit égale au produit de l'arc* B m *multiplié par* a. L'élément de l'arc B m est $=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, & l'élément de l'aire A P m B est ydx; donc $S.ydx=a\,S.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ou $ydx=a\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $y^2dx^2=aadx^2+aady^2$, $dx^2(y^2-aa)=aady^2$, $dx=\frac{ady}{\sqrt{(yy-aa)}}$, équation de la courbe des co-sinus hyperboliques (21).

116. PROBLEME. *Trouver la courbe dont l'aire en tournant autour de l'axe des abscisses, produit le solide* $\frac{c}{2r}S.\frac{a^3dx}{x}$.

Comparant l'élément des solides de révolution $\frac{c}{2r} y^2 dx$ avec la différentielle $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x}$ du solide proposé, l'on a $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x} = \frac{c}{2r} y^2 dx$, $\frac{a^3}{x} = y^2$, $a^3 = xy^2$, équation à une courbe hyperbolique.

117. PROBLEME. *Trouver une courbe* AM (Fig. 46), *rapportée aux co-ordonnées* AP $= x$, P$m = y$ *perpendiculaires l'une à l'autre telle que l'aire* AuP *soit égale au segment* AEF, *compris entre la corde* AE *& l'arc correspondant d'un demi-cercle dont le diamètre* AB $= 2a$. L'espace AFEP, selon ce qu'on a dit ci-dessus (14), est $= S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Le triangle APE est $= \frac{AP \cdot EP}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{(2ax - xx)}}{2}$; donc le segment AEF $= S. dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{x \sqrt{(2ax - xx)}}{2}$. en différentiant, l'on aura $dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} \cdot dx \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{adx - xdx}{(\sqrt{2ax - xx})} = \frac{adx \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, élément du segment AEF; donc $ydx = \frac{adx \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, ou $y = \frac{a\sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, équation d'une courbe du troisieme ordre Cette courbe commence en A, coupe le demi-cercle au point D correspondant à une abscisse $= \frac{3}{2} a$ & s'approche continuellement de son assymptote BN. Laire AmP de cette courbe est égale au segment circulaire AEF. Ajoutant de part & d'autre l'espace AmE, l'on aura l'espace AmEF compris entre la courbe, le cercle & la ligne droite mE, égal au triangle AEP. L'espace infiniment long ADMNB renfermé entre la courbe, le diamètre AB & l'assymptote sera égal au demi-cercle ADB; donc si du demi-cercle & de cet espace l'on retranche l'espace commun ADB, l'on aura l'espace infiniment long BNMD $=$ AFEDmA. Or cet espace est égal au triangle rectiligne ADG; donc BNMD est $=$ ADG.

118.

118. PROBLEME. *Sur la surface du quart d'un hémisphere* ABDC (Fig. 47), *mener une ligne* AQD, *de maniere que la lunule* AQDA *soit quarrable algébriquement.*

Je mène les grands cercles AQM, Aqm *, qui coupent la courbe en Q & q; je tire les perpendiculaires QP, qp sur le demi-axe AC, & des points M & m les perpendiculaires MN, mn à la ligne BC; enfin je mène OQ, parallèle à la ligne Mm. Je fais l'arc $BM = s$, $Mm = ds$, $BN = x$, $Nn = dx$, $AP = z$, $Pp = dz$, $PQ = y$, le rayon de la sphere $= a$. Il est visible que le triligne AQq est l'élément de la lunule; mais AOQ étant un infiniment petit du premier ordre, OQq sera un infiniment petit du second ordre; donc en négligeant cet infiniment petit, l'élément de la lunule sera AOQ. Je mène les arcs infiniment proches Vu, Zz parallèles **, du point V j'abaisse sur AC la perpendiculaire VT & je fais $AT = t$, $VT = u$. Mais VT étant le rayon de l'arc Vu, l'on a la proportion $a : VT = u :: Mm = ds : Vu = \frac{uds}{a}$; & parce que VZ est l'élément de l'arc AV dont le sinus verse est $AT = t$, le sinus droit étant $VT = u$, l'on a $VZ : a :: dt : u$ ***, ou $VZ = \frac{adt}{u}$; donc le rectangle $VuZz = \frac{uds}{a} \cdot \frac{adt}{u} = ds\,dt$. Donc intégrant, en regardant ds comme constante (ce qui est très-permis), l'on aura le triligne $AVu = t\,ds$, & supposant $AT = AP$, ou supposant $t = z$, l'on aura le triligne $AOQ = z\,ds$. Tel est l'élément de la lunule.

L'élément ds d'un arc de cercle dont le rayon est $= a$ & l'abscisse comptée du sommet $= x$, est, selon

* Les cercles dont les plans passent par le centre de la sphere sont appellés *grands cercles de la sphere.* Les *petits cercles* sont ceux dont les plans ne passent pas par le centre de la sphere.

** Les centres de ces arcs sont dans la ligne AC, & les cercles auxquels ils appartiennent sont des cercles parallèles.

*** Dans la figure 3, l'élément ir est à il, différentielle du sinus verse AH, comme le rayon Ci est au sinus droit iH.

ce qu'on a dit ci-dessus (31) $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc l'élément AOQ $= \frac{azdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc la portion de la lunule comprise entre l'arc circulaire AQ & l'arc AbQ de la courbe $AbQD$, sera $= S.\frac{azdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, & en supposant $z=a$, & $x=a$, l'on aura la lunule entiere. Ayant décrit un grand cercle quelconque AQM & mené MN perpendiculairement à BC, supposons $z=\sqrt{(2ax-xx)}$; c'est-à-dire, supposons MN $=$ AP, la lunule sera $= S.\ adx = ax$, & faisant $x=a$, la lunule entiere sera $= aa$. C'est pourquoi, si ayant décrit un grand cercle quelconque AQM, l'on mene MN perpendiculaire à BC, & qu'on prenne AP $=$ MN, & que dans le plan de ce cercle l'on mène PQ perpendiculaire sur AC, le point Q & tous ceux qui seront semblablement déterminés, appartiendront à la courbe cherchée, & la lunule AQDA sera égale au quarré du rayon.

119. PROBLEME. *On demande maintenant de trouver un onglet* AHBDQA *qui soit quarrable algébriquement.* Je remarque que le triligne AOQ vient d'être trouvé $= zds$; donc en supposant $z=$ AC $=a$, l'on aura le triligne AM$m = ads$; donc MOQm qui est l'élement de l'onglet sera $=(a-z).ds = \frac{(a-z).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc en intégrant, la partie de l'onglet comprise entre le quart de cercle AHB, les arcs de cercle BM, QM & l'arc QbA sera $= S.\frac{(a-z).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Soit $z=x$, ou AP $=$ BN; l'onglet deviendra $= S.\frac{(a-x).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = a\sqrt{(2ax-xx)}$, & en faisant $x=a$, l'onglet entier sera $= aa$.

La courbe AQD se construit de même que dans le problême précédent; car ayant pris un grand cercle quelconque, AQM, & mené le sinus MN de l'arc BM, prenez AP $=$ BN, & dans le plan AQMC du grand cercle AM menez PQ perpendiculaire à AC; le point Q

& tous les autres ainsi déterminés seront dans la courbe cherchée; & parce que les sinus verses BN, AP des arcs BM, AQ sont égaux, les arcs le seront aussi. C'est pourquoi prenant toujours AQ = BM, tous les points Q seront à la courbe.

REMARQUE. L'on peut souvent trouver la courbe qui résout un problême qui peut paroître d'abord assez difficile sans employer, ni le calcul différentiel, ni le calcul intégral, ainsi qu'on peut le voir en lisant la premiere partie de cet ouvrage, la section précédente, & par la solution du problême suivant.

120. PROBLEME. *Supposant un cercle amb n* (Fig. 48), *dont la demi-circonférence soit* = AS = C, *l'on demande de trouver des arcs qui soient entre eux comme les quarrés de leurs sinus.* Si l'on tire une ligne indéfinie At, sur laquelle en faisant AS = C, Sz = C, zt = C, & ainsi de suite, l'on prenne une infinité de parties dont chacune soit = C, qu'on fasse l'abscisse AP égale à l'arc am correspondant, que par le point P on mène PM perpendiculaire à AP & égale au sinus pm de l'arc am & qu'on fasse la même chose pour chaque arc de la demi-circonférence amb, la ligne AMS sera appellée la ligne des sinus. Si l'on fait Sg égale à l'arc bn, & qu'on mène de même gN = Dn, sinus de l'arc $ambn$, la partie SNz appartiendra aussi à la ligne des sinus. Mais le sinus gN sera négatif à cause de l'arc $ambn$ > C & < 2C. Si sur zt = C, l'on prend zq égale à l'arc $am = u$, & qu'on mène Rq = sin. u, le point R appartiendra aussi à la ligne des sinus. On voit aisément que les arcs u, C − u, 2C + u, 3C − u, 4C + u, 5C − u, &c. ont le même sinus.

Cela posé, la question est donc réduite à trouver une courbe AMBRV qui coupe la ligne des sinus en différens points M, r, R, V, &c. & qui soit telle que ses abscisses AP, AF, &c. soient entre elles comme les quarrés des ordonnées PM, rF, &c. communes à cette courbe & à la ligne des sinus. Si l'on fait les abscisses AP = x, l'ordonnée PM = y, la question sera réduite à trouver une courbe dans laquelle les x soient entre eux comme les quarrés y^2 des ordonnées; or nous sçavons que c'est-là une propriété de la parabole; ainsi la courbe AMrBR doit être une parabole.

Si l'on ſuppoſe que A P eſt l'axe de la parabole, l'angle que fait la courbe, ou la tangente de la coube avec l'axe AP au point A, ſera droit dans la parabole; mais cet angle eſt de 45° dans la ligne des ſinus comme nous le ferons voir dans un moment. Donc au commencement la parabole tombe hors de la ligne des ſinus. Si l'on ſuppoſe que l'équation de la parabole eſt $ax = y^2$, & qu'on faſſe le paramètre fort petit, la parabole coupera la ligne des ſinus dans pluſieurs points. Si l'on fait le rayon du cercle $amb n = p$, lorſqu'on aura $y = p$, l'on aura $ax = p^2$, $x = \frac{p^2}{a}$. Si l'on prend donc $x = \frac{p^2}{a}$ & $= \frac{5C}{2}$, une des branches de la parabole recontrera la ligne des ſinus au point correſpondant à cette abſciſſe. Si l'abſciſſe $x = \frac{pp}{a}$ répond à $\frac{C}{2}$, ou à $\frac{3}{2}$ C, ou à $\frac{5}{2}$ C, &c., comme les ordonnées paraboliques vont toujours en augmentant, la parabole ne rencontrera plus au-delà la ligne des ſinus. Si $\frac{p^2}{a} = x$ eſt $>$ C, la ligne des ſinus ſera coupée en pluſieurs points. Si l'abſciſſe $x = \frac{p^2}{a}$ eſt $= \frac{1}{2}$ C, la parabole touchera la ligne des ſinus ſans la couper. Si $\frac{p^2}{a}$ eſt $> 201 . C$, la demi-parabole A R coupera la ligne des ſinus au moins en 200 points*, & alors a ſera $< \frac{pp}{201 . C}$. Donc ſi on décrit une parabole A M R avec le paramètre $a < \frac{p^2}{201 . C}$, l'on aura au moins 200 arcs qui ſeront entr'eux comme les quarrés de leurs ſinus. Il eſt facile de voir comment on doit déterminer a pour avoir tel nombre d'arcs que l'on voudra qui ſoient dans le rapport des quarrés de leurs ſinus.

* Si on ſuppoſe que les deux branches de la parabole ſoient décrites, il eſt facile de voir en combien de points la branche A f N doit couper la ligne des ſinus.

Nous avons dit que l'angle PAM que fait la ligne des sinus avec la ligne AP étoit de 45°. Or c'est ce qui est évident; car si dans le cercle *ambn* on prend l'arc *am* infiniment petit, son sinus *mp* sera censé égal à cet arc; donc si AP est un arc infiniment petit, l'on aura AP = PM & le triangle rectangle AMP, dont l'hypoténuse est l'arc AM de la courbe des sinus sera isocelle, & l'angle MAP sera de 45°, aussi bien que l'angle PMA; donc, &c.

APPLICATION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL AUX COURBES A DOUBLE COURBURE.

121. Afin de mieux comprendre cette matiere, les commençans feront bien de relire ce que nous avons enseigné dans la premiere partie de cet ouvrage, sur les *surfaces courbes* & *les courbes à double courbure.*

122. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* AN (Fig. 49), *son axe* AP *des* x, *dont l'origine est* A, *l'équation de la courbe de projection sur le plan* APM *de la base, & celle d'une des deux autres courbes de projection, on demande de mener à un point* N *de la courbe à double courbure la tangente* Nt, *ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur de la sous-tangente* Mt *aussi bien que sa position.* Du point N, je mene l'ordonnée NM, & du point M où elle rencontre le plan de la base, sa co-ordonnée MP, je prends le point n infiniment proche de N, je mène les co-ordonnées correspondantes nm, pm, & Nh parallèle à Mm, aussi bien que MH parallèle à l'axe AP. Faisant ensuite AP $= x$, PM $= y$, MN $= z$, l'on aura P$p = dx$, mH $= dy$, $nh = dz$ & M$m = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Mais les triangles semblables nNh, NMt, donnent nh : Nh = Mm :: MN : Mt, ou $dz : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: z : \text{M}t = \frac{z \cdot \sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$.

Il est aisé de voir que cette sous-tangente doit être située sur MT, tangente de la courbe de projection AM, puisque les lignes Nn, Mm étant dans le même plan, leurs prolongemens doivent aussi être dans le même plan. Pour faire usage de cette formule il faudra, par le moyen des courbes de projection, éliminer deux des

trois variables qu'elle contient, la différentielle de la variable qui restera se trouvant au numérateur & au dénominateur, la formule sera délivrée de différentielles.

123. COROLLAIRE I. La tangente Nt est égale à $\sqrt{((MN)^2 + (Mt)^2)} = \sqrt{\left(\frac{(zz.dx^2 + zzdy^2)}{dz^2} + z^2\right)} = \frac{z}{dz} \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

124. COROLLAIRE II. Si dans le plan du triangle tMN on mène la perpendiculaire NO à la courbe à double courbure, les triangles semblables Nnh, NMO, donneront $Nh = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : nh = dz :: MN = z : MO = \frac{zdz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, expression de la sous-normale MO; donc la normale $NO = \sqrt{(\overline{MO}^2 + \overline{MN}^2)} = \sqrt{(\overline{MO}^2 + z^2)} = \frac{z\sqrt{(dz^2 + dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

REMARQUE. Si l'on trouvoit la sous-tangente négative, on la prendroit du côté opposé; c'est-à-dire, qu'on la prendroit sur la tangente tM du côté de O, & si la sous-normale étoit négative, on la prendroit du côté de A.

125. PROBLEME. *Supposant que les équations des courbes de projection* AM, AV, *sur les plans* APM, RAQ, *sont* $ax = y^2$ & $by = zz$, *on demande la sous-tangente* Mt *de la courbe à double courbure* AN. La première équation donne $adx = 2ydy$, la seconde donne $bdy = 2zdz$; donc $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, $dz = \frac{bdy}{2z} = \frac{bdy}{2\sqrt{by}} = \frac{abdx}{4\sqrt[4]{(a^3b^2x^3)}}$ (en substituant la valeur de dy & celle de $y = \sqrt{ax}$); donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx . \sqrt{\left(\frac{4x + a}{4x}\right)}$. Mais de plus $zz = by = b\sqrt{ax} = \sqrt{(bbax)}$; donc $z = \sqrt[4]{bbax}$. Substituant les va-

leurs de z, de dz, de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ dans la formule de la sous-tangénte, l'on a $\frac{z}{dz}.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 4x.\sqrt{\left(\frac{(4x+a)}{4x}\right)} = 2\sqrt{.(4xx+ax)}$; mais la sous-tangente de la parabole AM est $=2x$ & la tangente $MT = \sqrt{(4xx+y^2)} = \sqrt{(4xx+ax)}$; donc la sous-tangente Mt de la courbe à double courbure AN, est double de la tangente MT.

126. PROBLEME. *Trouver la sous-normale de la même courbe à double courbure.* NM étant une perpendiculaire abaissée du sommet N de l'angle droit du triangle rectangle tNO sur l'hypothénuse, l'on a $Mt : MN :: MN = z = \sqrt[4]{abbx}$ (ainsi qu'on l'a vu ci-dessus 125) : $MO = \frac{zz}{Mt} = \frac{\sqrt{abb}}{2\sqrt{(4x+a)}}$. Si l'on suppose $x=o$, l'on aura $MO = \frac{b}{2}$; Si l'on fait $x = \infty$, l'on a $MO = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abb}{4\infty}} = o$; donc à l'infini la tangente de la courbe à double courbure est parallèle au plan de la base.

127. PROBLEME. *Supposant que* RN (Fig. 50), *est une courbe à double courbure, telle que la courbe de projection sur le plan de la base soit la parabole de l'équation* $ax = y^2$ *& la courbe de projection sur le plan* RAQ *des* y *& des* z, *le cercle de l'équation* $y^2 = aa - zz$, *trouver la valeur de la sous-tangente de cette courbe.* En prenant la valeur de z & de dz en x & dx, celle de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, qu'on a trouvée (125) $= dx\sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$ & la valeur de $z^2 = aa - y^2 = aa - ax$ (à cause de $y^2 = ax$), l'on aura $z = \sqrt{(aa-ax)}$, $dz = \frac{-adx}{2\sqrt{(aa-ax)}}$, & $\frac{z}{dz}.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 2.(a-x)\times-\sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$

$= - \frac{2.(a-x).\sqrt{(4xx+ax)}}{2x} = - \frac{(a-x).\sqrt{(4xx+ax)}}{x}$; donc on trouvera la sous-tangente demandée que j'appellerai S, en prenant une ligne $= \sqrt{(4xx+ax)}$, tangente de la parabole, supposant cette ligne $= u$, & faisant $x : u :: a - x : S$; mais on prendra S de l'autre côté de M par rapport à T à cause du signe $-$.

128. PROBLEME. *Trouver la sous-normale de la courbe* RN *dans la même supposition.* Si l'on appelle cette sous-normale R, & que l'on fasse la sous-tangente $S : z :: z : R$, l'on aura $R = \frac{zz}{S} = \frac{x.(aa-ax)}{-(x-a).\sqrt{(4xx+ax)}}$ $= \frac{-ax}{\sqrt{(4xx+ax)}}$, qui se réduit à $\frac{-aa}{\sqrt{5aa}} = -a\sqrt{\frac{1}{5}}$, en supposant $x = a$. La sous-normale doit être prise du côté de A, parce qu'elle est négative.

Lorsque $x = a$, l'on a $z^2 = aa - ax = 0$, & $z = 0$; donc la courbe à double courbure doit rencontrer le plan de la base au point C correspondant à $x = a$.

129. PROBLEME. *Rectifier une courbe à double courbure* AN (Fig. 49). Le triangle rectangle Nhn donne l'élément Nn (de la courbe à double courbure) $= \sqrt{((nh)^2 + (Nh)^2)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, $Nh = Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $Nn = \sqrt{(dz^2 + dx^2 + dy^2)}$. On éliminera, par le moyen des équations des courbes de projection, toutes les différentielles excepté une, & intégrant ensuite, l'on aura la valeur de l'arc AN.

130. PROBLEME. *Rectifier la courbe à double courbure, dont l'équation de la courbe de projection sur le plan de la base est* $(y^2 - 2aa)^3 = 9a^4x^2$, *l'équation de la courbe de projection sur le plan des* y *&* des z *étant* $y^2 = az$. La premiere équation donne $x = \frac{(yy-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$, $dx = \frac{ydy}{aa}.(y^2 - 2aa)^{\frac{1}{2}}$. La seconde équation donne $z = \frac{yy}{a}$, $dz = \frac{2ydy}{a}$. Substituant ces valeurs de dx & de dz

dans l'élément $\sqrt{(dz^2 + dx^2 + dy^2)}$, l'on a, toute réduction faite, $\frac{yydy + a^2dy}{aa}$, dont l'intégrale est $\frac{y^3}{3aa} + y + C$.

Pour déterminer la constante C, je remarque que l'arc de la courbe doit être $= 0$, lorsque $x = 0$; mais $x = \frac{(yy - 2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; donc alors $y^2 = 2aa$, $y = a\sqrt{2}$; donc puisque, lorsque $x = 0$, l'intégrale doit être $= 0$; l'on aura $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3aa} + a\sqrt{2} + C = 0$, ou $\frac{2a\sqrt{2}}{3} + a\sqrt{2} + C = 0$, ou $C = -\frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Ainsi l'intégrale complette est $\frac{y^3}{3aa} + y - \frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Telle sera la valeur de l'arc de la courbe à double courbure, compris entre l'origine de la courbe & le point auquel répond l'ordonnée y.

Si l'on fait $y = 0$, l'on a $x = \frac{(-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; mais $(-2aa)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-8a^6)}$, quantité imaginaire; donc on ne peut pas supposer $y = 0$. On ne peut pas supposer non plus $z = \frac{yy}{a} = 0$; ainsi l'origine de la courbe à double courbure ne sçauroit être sur le plan de la base. Mais parce que $x = 0$, donne $y^2 = 2aa$, l'on a alors $z = \frac{2aa}{a} = 2a$. Par conséquent cette origine est éloignée au-dessus du plan de base de la quantité $2a$.

131. **PROBLEME.** *Soit la courbe à double courbure* AN (Fig. 51), *dont les axes sont* AP, AR, AQ *& deux de ses courbes de projection* AM, *&* AV=PN, *on demande de trouver la valeur de l'espace* APN *qui est une partie de la surface*

cylindrique AVNP* *élevée sur la courbe* AV, *déterminé par la courbe à double courbure, par l'axe* AP *& la courbe* PN = AV. Je prends $Pp = dx$, je mene l'ordonnée pn & je décris la courbe pn dont le plan est perpendiculaire à celui de la base, & parallèle à ceux des courbes AV & PN. La petite surface $Nn\,Pp$ sera l'élément de la surface cherchée. En menant NG parallèle à AP, & retranchant le petit triangle NnG (qui disparoit devant $PpNG$), l'élément de la surface cherchée sera $PpNG$. Mais cet élément est le produit de $Pp = dx$ par la courbe PN = AV, & les co-ordonnées de cette courbe étant y & z, l'élément de cette courbe sera $= \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$; donc cette courbe $= S.\sqrt{(dy^2 + dz^2)}$, & l'élément de la surface cherchée est $= dx.\,S.\sqrt{(dz^2 + dy^2)}$.

Si l'on réduit cet élément à une seule variable, & qu'on integre, l'on aura la surface cherchée.

132. PROBLÊME. *En supposant que la courbe de projection* AM *soit une parabole dont l'équation soit* $y^2 = ax$, *& que la courbe de projection* AV = PN *soit une autre parabole, dont l'équation soit* $y^3 = azz$, *on demande la valeur de la surface* APN *renfermée entre la courbe à double courbure, la parabole cubique* PN *& l'axe* AP. L'on aura $x = \frac{yy}{a}$ & $z = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$ & $dz = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$; donc $\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{3\,dy\sqrt{(y + \frac{4}{9}a)}}{2a^{\frac{1}{2}}}$, & $S.\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, en intégrant par la regle fondamentale; donc $dx\,S.\sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}}}.(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}} = \frac{2y\,dy}{a^{\frac{3}{2}}} \times (y + \frac{4}{9}.a)^{\frac{3}{2}}$, en substituant la valeur $\frac{2y\,dy}{a}$ de dx.

* Par cylindre on entend ici un solide dont la grosseur est uniforme dans toute sa longueur.

Je remarque maintenant qu'en augmentant d'une unité l'exposant 1 sous-entendu de la variable y hors du signe, & le divisant ensuite par l'exposant 1 sous entendu de la variable y sous le signe, le quotient donne un nombre entier positif; ainsi (1), cette différentielle est intégrable. L'on a vu ci-dessus (1), que la différentielle $ax^{m \cdot n - n - 1} dx \times (b+gx^n)^p$, devenoit (en faisant $(b+gx^n)^p = z$) $\frac{a}{n.pg^{m-n+1}} \times z^{\frac{1}{p}} dz . (z^{\frac{1}{p}} - b)^m$. Si dans cette formule on fait $= m$ [illegible] $= 1$ & qu'on intégre en négligeant le facteur constant, l'intégrale sera $= S. dz . (z^{\frac{2}{p}} - bz^{\frac{1}{p}}) = \frac{z^{\frac{2}{p}+1}}{\frac{2}{p}+1} - \frac{b}{\frac{1}{p}+1} . z^{\frac{1}{p}+1}$. Mais si dans la différentielle $ax^{m \cdot n - n - 1} \times dx (b+gx^n)^p$, l'on change x en y, dx en dy, qu'on fasse $b = \frac{4}{9} a$, $g = 1$, & qu'on change le facteur constant a en $\frac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$, p en $\frac{3}{2}$, que l'on multiplie l'intégrale que l'on vient de trouver par le facteur constant qu'on a eu ci-dessus (1), ou par $\frac{a}{n.p.g^{m-n+1}}$, qui parce que a est ici représenté par $\frac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$, p par $\frac{3}{2}$, que $n = 1$, & $g = 1$, sera $\frac{4}{3a^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura, à cause de $z = (y + \frac{4}{9} . a)^{\frac{2}{3}}$, l'on aura, dis-je, toute réduction faite, l'intégrale cherchée $= \frac{4}{7a^{\frac{3}{2}}} (y - \frac{8}{45} . a) . (y + \frac{4}{9} a)^{\frac{3}{2}}$. Pour sçavoir si cette intégrale est complette, je remarque qu'elle doit être $= 0$, lorsque $y = 0$; mais alors elle devient $= - \frac{1024 . aa}{76545}$; donc la constante qu'il faut ajouter est $= + \frac{1024 . aa}{76545}$.

& l'intégrale complette est $\frac{4}{7a^{\frac{3}{2}}} \cdot (y - \frac{8}{45}).a.(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{5}{2}} + \frac{1024.aa}{76545}$. Telle est la valeur de la surface A P N.

133. PROBLEME. *Trouver la surface cylindrique* A V N P. Cette surface étant le produit de A P par l'arc P N, sera $= x S \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$.

COROLLAIRE. Si A u est une demi-cicloïde dont le diamètre du cercle générateur soit a, A u sera $= 2a$ & la surface cylindrique A u n p sera $= 2ax$. Si $x = a$, cette surface sera $2.aa$, ou double du quarré du diamètre du cercle générateur.

134. PROBLEME. *Trouver l'espace* A V N *compris entre la courbe à double courbure* A N, *la courbe de projection* A V, *& la ligne* V N *parallèle à* A P. Si de la surface cylindrique APNV, on retranche la surface ANP, l'on aura la surface cherchée $= x S. \sqrt{(dy^2 + dz^2)} - \int dx\, S. \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$.

135. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* A N *avec ses axes & ses équations, trouver le solide* A P M N *déterminé par le plan* M N P, *la base* A P M *& les surfaces courbes* A P N & A M N. Le petit solide M P p m n N, compris entre les deux plans P M N & $p m n$, étant l'élément du solide cherché, il s'agit de trouver son expression. Pour cela, je remarque que cet élément est un prisme dont la base est le plan P M N & la hauteur P p. Or l'élément du plan P M N est $= z\, dy$; car lorsque l'ordonnée de la courbe est y & l'abscisse x, l'élément de l'aire de la courbe est $y\, dx$; donc lorsque l'ordonnée M N est z & que l'abscisse P M est y, l'élément de l'aire doit être $= z\, dy$; donc la base de notre solide élémentaire sera $= S. z\, dy$, le solide élémentaire sera $= dx\, S. z\, dy$ & le solide cherché sera $S. dx. S. z\, dy$. Pour pouvoir intégrer, on réduira, par le moyen de la courbe P N, la valeur de $S. z\, dy$ en z & ensuite en x ou d'abord en y & ensuite en x, par le moyen de l'équation de la courbe A M afin que l'élément ne contienne qu'une seule variable x, ou bien, on tâchera d'exprimer l'élément par une seule variable z, par exemple, & sa différentielle dz, en éliminant dx & dy.

136. PROBLEME. *Supposant que la courbe de projection sur le plan de la base est la parabole de l'équation* $ax = y^2$, *&*

la courbe de projection sur le plan des y *& des* z *la parabole de l'équation* $zz = by$, *on demande le solide* AMNP. L'on aura $z = \sqrt{by}$; donc l'élément $dx \,.\, S.z\,dy$, sera $= dx \,.\, S.dy\sqrt{by}$, ou $dx \,.\, S\,dy\sqrt{(b\sqrt{ax})}$, parce que $y = ax$. Mais de l'équation $y = \sqrt{ax}$, l'on tire $dy = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{a\,dx}{\sqrt{ax}}$; donc en substituant l'on aura $dx.S.dy\sqrt{by} = \frac{1}{2}dx.a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}S.x^{-\frac{1}{4}}dx$ *. Or $S.x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$; donc l'élement sera $\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{4}}dx$, dont l'intégrale est $\frac{8}{21}.a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{7}{4}}$, valeur du solide proposé. Si l'on veut l'exprimer en y, on substituera la valeur de x prise de l'équation $y^2 = ax$ & si l'on substitue ensuite la valeur de y en z, on l'exprimera par une fonction de z.

137. PROBLEME. *Trouver la valeur du prisme* AVNMP, *compris entre les plans* AVQ & PMN. Si l'on multiplie l'aire PMN par AP $= x$, le solide cherché sera $= x.S.z\,dy$.

COROLLAIRE I. Si la courbe AV $=$ PN est une parabole dont z soit l'ordonnée & y l'abscisse, l'aire PMN sera $= \frac{2}{3}zy$ & le prisme demandé sera $= \frac{2}{3}xzy$.

138. COROLLAIRE II. Si du prisme $x.S.z\,dy$, l'on retranche le solide AMNP, l'on aura le solide AVMN $= x\,S.z\,dy - S.dx\,S.z\,dy$. C'est l'expression du solide qui manque au solide AMNP pour égaler le prisme APMNV.

139. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* AN (Fig. 52) *& ses courbes de projection sur le plan de la base & sur celui des* y *& des* z, *trouver le solide* AMNVQ, *en supposant que l'on ne connoît ni le prisme*

* On doit faire attention que $\sqrt{(b.\sqrt{ax})} = \sqrt{(\sqrt{.bbax})} = \sqrt[4]{bbax} = b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}$, & que $\sqrt{ax} = \sqrt[4]{aaxx} = a^{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}$.

APMNVQ, *ni le solide* APMN. Je mene le plan $unmq$ parallèle au plan VNMQ & infiniment proche de ce dernier plan; l'élément du solide cherché sera $VunNMmQq$. Si l'on fait passer les plans $VfgN$, $NLgKM$ par les lignes VN, NM, ces plans retrancheront les petits solides $VufgLN$, $nLNMKm$ qui sont inassignables respectivement au prisme $VfgNMKqQ$ qu'on peut regarder comme l'élément du solide demandé. Pour avoir l'expression de cet élément, je multiplie Qq par le rectangle $VNMQ = x \cdot z$. Mais $Qq = dy$; donc cet élément est $= xzdy$.

COROLLAIRE. Donc le solide $APMN = x . S. zdy = S. xzdy$. Autre expression différente de celle qu'on a trouvée ci-dessus (135), pour le même solide.

140. PROBLEME. *Supposant que la courbe* AM *(qui est la courbe de projection de la courbe à double courbure sur le plan de la base) est la parabole de l'équation* $ax = y^2$, *& que la courbe* AV *de projection sur le plan des* y *& des* z *est l'hyperbole équilatère dont l'équation est* $zy = aa$, *l'on demande le solide* AMNVQ. L'équation $ax = y^2$ donne $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{adx}{\sqrt{ax}}$. L'équation $zy = a^2$ donne $z = \frac{a^2}{y} = \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$. Substituant les valeurs de z & de dy, qu'on vient de trouver dans $xzdy$, l'élément du solide demandé sera $= x \cdot \frac{a^2}{\sqrt{ax}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{adx}{\sqrt{ax}} = \frac{1}{2} x \cdot \frac{a^3 dx}{ax} = \frac{1}{2} \cdot a^2 dx$, dont l'intégrale $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot x$ est la valeur du solide cherché. Si dans cette intégrale l'on substitue à la place de x sa valeur $\frac{y^2}{a}$ prise de l'équation $ax = y^2$, l'on aura $\frac{1}{2} ay^2$ pour la valeur du solide cherché.





SECTION III.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES ET DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

NOUS diviserons cette Section en deux parties. Dans la premiere nous traiterons de l'intégration des formules & des équations différentielles à une & à plusieurs variables. Nous parlerons dans la seconde de quelques méthodes d'intégrer peu connues, du calcul des variations & de ses applications.

PREMIERE PARTIE

DE LA TROISIÈME SECTION.

1. NOUS parlerons d'abord de l'intégration des différentielles à une seule variable, & de celles qui ne contiennent qu'une seule variable dans chacun de leurs termes. Nous passerons ensuite aux différentielles à plusieurs variables. Mais avant d'entrer en matiere, nous remarquerons que, selon ce qu'on a dit dans la section précédente (1), l'intégrale de $mx^{m-1}dx$, ou S. $mx^{m-1}dx$ est $= x^m$, S. $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{y}{x}$, S. $\frac{dx}{x} = $ L. x, S. $(ydx + xdy) = xy$. L'on a vu aussi dans

l'endroit cité, que l'on pouvoit trouver l'intégrale d'une différentielle binome $ax^m dx(b+gx^n)^p$ toutes les fois que p est un nombre entier positif. De même toute différentielle de cette forme $ax^m dx(b+gx^n+fx^r+hx^i+ \&c.)^p$, sera intégrable algébriquement ou par logarithmes, toutes les fois que p sera un nombre entier positif, & que le polinome qui est sous le signe ne contiendra qu'un nombre fini de termes; car alors on n'aura à intégrer que des quantités de la forme $Bx^R dx$, dont l'intégrale est $\frac{B}{R+1}.x^{R+1}$. Mais si $R=-1$, l'intégrale de $Bx^R dx$ sera $=BL.x$. L'on a vu aussi dans le même endroit, que l'on peut intégrer toute différentielle binome telle que l'exposant de la variable hors du signe augmenté d'une unité étant divisé par l'exposant de la variable sous le signe donnera pour quotient un nombre entier positif. Il en sera de même si la différentielle binome ne se trouvant pas dans ce cas peut (sans changer de valeur) y être ramenée, en changeant l'exposant de la quantité sous le signe de positif en négatif, ou réciproquement. Ce sera la même chose si en multipliant hors du signe & divisant sous le signe, ou si en divisant hors du signe & multipliant sous le signe, la différentielle peut, sans changer de valeur, être ramenée à cette forme $ax^{m.n+n-1}dx.(b+gx^n)^p$, ou à celle-ci $ax^{m.n-1}dx(b+gx^n)^p$, m étant un nombre entier positif ou o dans le premier cas, & un nombre entier positif dans le second: car en augmentant d'une unité l'exposant de la quantité hors du signe, l'on a dans le premier cas $m.n+n$, qui est divisible par n, &

& donne pour quotient $m + 1$. Dans le second cas, divisant $m \cdot n$ par n, l'on a m pour quotient. Donc dans l'un & l'autre cas les quotients seront des nombres entiers positifs. On peut aussi voir facilement qu'on integre par la regle fondamentale, toute formule dont la quantité hors du signe (ce signe peut indiquer une racine ou une puissance) est la différentielle de la quantité sous le signe, exactement, ou même à un multiplicateur constant près, ce qui peut avoir lieu toutes les fois que la différentielle est de cette forme $a x^{n-1} dx$, ou peut y être ramené. La différentielle $xdx \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ est dans ce cas, parce que $x dx$ est la différentielle de la quantité sous le signe, à un multiplicateur constant près qui est 2, & son intégrale est $\frac{2}{3} \cdot \frac{xdx(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{2xdx} = \frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$. Quand pour abréger nous n'ajouterons point de constante, on devra toujours en supposer une.

2. L'on peut préparer la formule $dx \times \sqrt{(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3)}$ en prenant la racine du facteur $a^2 + 2ax + x^2$ & écrivant la différentielle de cette manière $(adx + xdx) \times \sqrt{(a+x)} = dx \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}$. Mais pour préparer la formule $(3ax^3dx + 4x^4dx) \cdot \sqrt{(ax + xx)}$, il faut diviser hors du signe par x, & multiplier la quantité sous le signe par x^2; c'est-à-dire, par x élevé à l'exposant du signe, parce que x^2 sous le signe est la même chose que x hors du signe. L'on aura

donc $(3ax^2dx + 4x^3dx) \times \sqrt{(ax^3 + x^4)}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, est $\frac{2}{3} . (ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$. Quelquefois une formule différentielle peut être préparée en multipliant ou en divisant le numérateur & le dénominateur par une même quantité. La fraction $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(3a^2 + 2x)}}$, devient, en multipliant le numérateur & le dénominateur par x, $\frac{axdx + xxdx}{\sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}}$, dont l'intégrale $= \frac{1}{3}\sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}$, comme il est aisé de le voir, en différentiant cette intégrale.

Pour préparer la formule $\frac{dx . (a + x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2a^2x + 3ax^2 + x^3)}}$, je divise le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{(a+x)}$, & j'ai $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = (adx + xdx) \times (2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, est $= (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2ax + xx)}$.

Il est souvent utile d'ajouter à une formule différentielle & d'en retrancher en même tems une même fonction intégrable. Soit la formule $xdx . (a + x)^m$, & supposons qu'on ne sache pas comment il faut s'y prendre pour l'intégrer. En ajoutant & retranchant $adx . (a + x)^m$, dont nous connoissons l'intégrale, il vient $xdx \times (a + x)^m + adx . (a + x)^m - adx . (a + x)^m$,

dont l'intégrale est $\frac{(a+x)^{m+2}}{m+2} - \frac{a.(a+x)^{m+1}}{m+1}$ $= (A) \left(\frac{a+x.}{m+2} - \frac{a}{m+1}\right).(a+x^{m+1} =$ $\left(\frac{(m+1).x - a}{(m+2)\quad(m+1)}\right).(a+x^{m+1})$. En effet en différentiant l'intégrale A, l'on a $\frac{dx}{m+2}.(a+x)^{m+1}$ $+ (m+1).\left(\frac{a+x}{m+2} - \frac{a}{m+1}\right).(a+x)^m dx.$ Mais $(a+x)^{m+1} = (a+x).(a+x)^m =$ $a.(a+x)^m + x.(a+x)^m$; donc notre différentielle devient $\frac{dx}{m+2}.a.(a+x)^m +$ $\frac{xdx.(a+x)^m}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} dx.a(a+x)^m$ $+ \frac{m+1}{m+2}.x.dx.(a+x)^m - \frac{m+1}{m+1} \times$ $a.(a+x)^m dx = \frac{m+1+1}{m+2}.xdx \times$ $(a+x)^m + \frac{m+1+1}{m+2}.adx.(a+x)^m$ $-\frac{m+1}{m+1}.a.dx.(a+x)^m = xdx.(a+x)^m$ $+ adx.(a+x)^m - adx.(a+x)^m =$ $xdx.(a+x)^m$.

3. Il est souvent utile de partager une formule différentielle en deux parties pour la comparer à la formule $xdy + ydx$, dont l'intégrale est $= xy$. Qu'on propose, par exemple, la formule $-$ $\frac{a^2dx}{xx\sqrt{(a^2-x^2)}}$, je la dispose ainsi

$\frac{(-aa+xx-xx).dx}{x^2\sqrt{(aa-xx)}}$; Je partage celle-ci de cette manière $-\frac{dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^2}-\frac{xdx}{x\sqrt{(aa-xx)}}$ (ces fractions étant réduites au même dénominateur rendront la formule dont elles sont les parties), ou $\sqrt{(aa-xx)}.d\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\times d.\sqrt{(aa-xx)}$ (la lettre d indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité qui est à sa droite), dont l'intégrale sera $\frac{1}{x}\sqrt{(aa-xx)}$, quantité dont la différentielle est $\sqrt{(aa-xx)}.d\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}d\sqrt{(aa-xx)}$. Si on suppose $x=\sqrt{(aa-xx)}$, & $y=\frac{1}{x}$, dans la formule ci-dessus $xdy+ydx$, on verra aisément que $\sqrt{(aa-xx)}\times d\left(\frac{1}{x}\right)$ est $=xdy$, & que $\frac{1}{x}d\sqrt{(aa-xx)}=ydx$, & parce que yx est l'intégrale de $xdy+ydx$, notre intégrale sera $\frac{1}{x}\sqrt{(aa-xx)}$.

4. Pour avoir l'intégrale d'une formule différentielle, il faut quelquefois élever des binomes ou des polinomes à des puissances. Par exemple, pour avoir l'intégrale de la formule $x^{\frac{1}{3}}dx(a-x)^2$, j'élève $a-x$ au quarré, & je multiplie tous les termes de ce quarré par $x^{\frac{1}{3}}dx$, ce qui donne $a^2x^{\frac{1}{3}}dx-2ax^{\frac{4}{3}}dx+x^{\frac{7}{3}}dx$. Prenant main-

tenant l'intégrale de chaque terme, j'ai $\frac{3}{4}a^2x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}ax^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}$.

5. Il faut quelquefois employer les substitutions pour changer une formule dont on ne connoit pas l'intégrale en une autre qu'on sache intégrer. On peut aussi quelquefois, par le moyen des substitutions changer une formule irrationnelle en rationnelle & intégrer ensuite facilement, comme nous le ferons voir par plusieurs exemples.

Soit la formule $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}.\sqrt{(a+\sqrt{(2ax+xx)})}}$.

Pour la réduire à une forme plus simple, je suppose $\sqrt{(2ax + xx)} = z$; donc $(2ax + xx) = z^2$, $2adx + 2xdx = 2zdz$, $adx + xdx = zdz$; donc en substituant z & zdz à la place des quantités qu'elles représentent, la formule proposée deviendra $= \frac{zdz}{z\sqrt{(a+z)}} = \frac{dz}{\sqrt{(a+z)}} = dz.(a+z)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est $2(a+z)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a+z)} = 2\sqrt{(a+\sqrt{(2ax+xx)})}$.

Soit la formule $\frac{-aadx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$, que j'écris ainsi $\frac{aa}{x} \times \frac{-xdx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$. Parce que $\frac{-xdx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable algébriquement, je fais son intégrale $\frac{1}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{z}{aa}$; ainsi $\frac{-xdx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dz}{aa}$, & la formule proposée devient $\frac{dz}{x}$. Pour trouver x, j'élève au quarré la formule de substitution, &

j'ai $\frac{1}{xx-aa}=\frac{z^2}{a^4}$, ou $\frac{a^4}{z^2}=xx-aa$, ou $xx=aa+\frac{a^4}{z^2}=\frac{aaz^2+a^4}{z^2}$, $x=\frac{a}{z}\sqrt{(z^2+aa)}$. Substituant cette valeur de x dans $\frac{dz}{x}$, la formule proposée sera $=\frac{zdz}{a\sqrt{(aa+zz)}}$, dont l'intégrale est $=\frac{1}{a}\cdot(aa+zz)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{(aa+zz)}}{a}$ $=\frac{x}{\sqrt{(xx-aa)}}$ *. Il n'y a aucune règle pour connoître quelle substitution on doit employer dans tous les cas pour changer une formule différentielle qui ne paroit pas intégrable en une autre qu'on puisse facilement intégrer : l'usage & l'industrie du calculateur doivent suppléer aux règles.

Soit la formule $\frac{dx}{x\sqrt{(ax-xx)}}$. Pour que cette formule soit rationnelle, il faut que $\sqrt{(ax-xx)}$ soit un quarré. Je fais $ax-xx=\frac{a^2x^2}{z^2}$; ce qui donne $x=\frac{az^2}{a^2+z^2}$; donc $\sqrt{(ax-xx)}$ $=\frac{ax}{z}=\frac{a^2z}{a^2+z^2}$, $dx=\frac{2a^3zdz}{(aa+zz)^2}$, & faisant les substitutions, la formule proposée devient

* Lorsque pour abréger l'on n'ajoute point de constante, le lecteur doit y suppléer; à l'égard de sa détermination, elle dépend, dans chaque cas particulier, de la nature du Problême qui a donné cette intégrale.

$= \frac{2dz}{zz}$, dont l'intégrale est $= -\frac{2}{z}$. Mais $z = \frac{ax}{\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{(a - x)}}$. Donc l'intégrale de la formule proposée sera $= \frac{-2\sqrt{(a-x)}}{a\sqrt{x}}$.

6. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale de la formule* $(x + \sqrt{(1 + xx)})^n dx$. Je fais $x + \sqrt{(1+xx)} = z$; donc $x = \frac{zz-1}{2z}$, $dx = \frac{dz(zz+1)}{2zz}$; ainsi la formule proposée devient $= \frac{1}{2} z^{n-2}.dz \times (zz+1) = \frac{1}{2} z^n dz + \frac{1}{2} z^{n-2} dz$ (A), dont l'intégrale est $= \frac{z^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{z^{n-1}}{2(n-1)} +$ C. Si on avoit eu $n = 1$, ou $n = -1$, l'un ou l'autre terme de la différentielle A auroit eu un exposant $= -1$; ainsi l'on auroit intégré ce terme par les logarithmes.

7. THÉORÊME. *Toute différentielle* $dx \times (a + bx^n + cx^m + gx^l + \&c.)^p$, *p étant un nombre entier, & les exposans de x dans les termes particuliers étant tous fractionnaires, ou en partie entiers & en partie fractionnaires, peut toujours être rendue rationnelle.*

Supposons que n & m soient seulement fractionnaires, l étant entier, & que n soit $= \frac{r}{i}$, fraction irréductible, $m = \frac{t}{u}$ autre fraction irréductible, je cherche un nombre entier h qui soit divisible exactement par i & par u, & je suppose $x = z^h$: donc $dx = hz^{h-1}dz$; par conséquent en substituant z^h au

lieu de x & $hz^{h-1}dz$, au lieu de dx, la différentielle du théorême sera $hz^{h-1}dz \times (a + bz^{\frac{rh}{i}} + cz^{\frac{th}{u}} + gz^{hl})^p$; or h étant divisible par i & par u, le second & le troisième termes seront affectés d'exposants entiers. Donc la formule substituée sera rationnelle. Si l avoit été un exposant fractionnaire $= \frac{v}{s}$, on auroit pris pour h un nombre entier divisible à la fois par i, u & s, & ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre d'exposans fractionnaires.

8. PROBLÊME. *Intégrer la différentielle* $\frac{dy\sqrt{y} + bdy}{y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}}}$. Je change $\sqrt{y}$ en $y^{\frac{1}{2}}$, & je réduis les exposans $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$ au même dénominateur, ce qui donne $\frac{4}{6}$ & $\frac{3}{6}$. Donc la formule proposée devient $\frac{dy.y^{\frac{3}{6}} + bdy}{y^{\frac{4}{6}} + y^{\frac{3}{6}}}$. Je suppose $y = z^6$ (6 est divisible par 3 & par 2); donc $dy = 6z^5dz$, & la formule proposée devient $\frac{6z^8dz + 6bz^5dz}{z^4 + z^3} = \frac{6z^5dz + 6bz^2dz}{z+1}$. Je partage cette dernière formule de cette manière $\frac{6dz.z^5}{z+1} + \frac{6bdz.z^2}{z+1}$. Je divise z^5 par $z + 1$. Je trouve d'abord (en prenant z pour le premier terme du diviseur) z^4 pour quotient; multipliant le diviseur par le quotient, & retranchant le produit du dividende z^5, il reste $-z^4$, que je divise de même pour avoir $-z^3$ au quotient. Retranchant

encore le produit du diviſeur par le quotient, j'ai $+z^3$ pour reſte, je continue la diviſion juſqu'à ce que le reſte ſoit 1, & diviſant ce reſte par $z+1$, le quotient ſera (A) $z^4-z^3+z^2-z+1+\frac{1}{z+1}$. De même $\frac{z^2}{z+1}=z-1+\frac{1}{z+1}$ (B). Multipliant tous les termes du quotient A, par $6\,dz$, & intégrant, l'on aura $\frac{6}{5}z^5-\frac{6}{4}z^4+\frac{6}{3}z^3-\frac{6}{2}z^2+6z+6.\mathrm{L}.(z+1)$. Multipliant tout de même les termes du quotient B par $6\,b\,dz$, & intégrant, l'on a $\frac{6bz^2}{2}-6bz+6b\mathrm{L}.(z+1)$ *; joignant enſemble cette ſuite de termes l'on aura l'intégrale totale. Si l'on veut l'exprimer en y, l'on ſubſtituera la valeur de z en y.

Soit la différentielle $y^m dy(b+gy^n)^p$. Pour ſavoir dans quel cas cette formule eſt exactement intégrable, je fais $(b+gy^n)^p=z^r$, r étant indéterminée; donc $b+gy^n=z^{\frac{r}{p}}$, $y^n=\frac{z^{\frac{r}{p}}-b}{g}$, $y=\left(\frac{z^{\frac{r}{p}}-b}{g}\right)^{\frac{1}{n}}$, $y^m=\left(\frac{z^{\frac{r}{p}}-b}{g}\right)^{\frac{m}{n}}$, $dy=\frac{r}{npg}z^{\frac{r}{p}-1}dz\left(\frac{z^{\frac{r}{p}}-b}{g}\right)^{\frac{1}{n}-1}$; donc la formule propoſée devient $=\frac{r}{npg}z^{\frac{r}{p}+r-1}dz\times\left(\frac{z^{\frac{r}{p}}-b}{g}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}$, qui eſt intégrable lorſque $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1$

* L déſigne le logarithme hyperbolique.

$= \frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier positif, ou o. Si $\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier négatif, la formule sera rationnelle en supposant $r = p$. Si $p = \frac{u}{2}$, u étant un nombre impair positif ou négatif, & $\frac{m+1}{n} = u$. La formule pourra être rendue rationnelle, en suivant la méthode du théorême précédent.

9. PROBLEME. *Dans quel cas peut-on rendre rationnelle la formule* $x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{u}{v}}$, u & v étant des nombres entiers. Si $v = 1$, il est visible que la formule sera rationelle, pourvu que m & n soient rationnelles, mais si $\frac{u}{v}$ est une fraction irréductible, il faut employer une double substitution. Qu'on fasse $a+bx^n = z^v$; donc $(a+bx^n)^{\frac{u}{v}} = z^u$, $x^n = \frac{z^v - a}{b}$; ainsi $x^m = \left(\frac{z^v-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$,

& $x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{v}{bn} z^{v+u-1}\, dz \times \left(\frac{z^v-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$, ce qui fait voir que toutes les fois que $\frac{m-n}{n} = \frac{m}{n} - 1$, ou $\frac{m}{n}$ seront des nombres entiers, cette formule sera rationnelle. Supposons en second lieu que $a+bx^n = x^n z^v$, ce qui donne $x^n = \frac{a}{z^v - b}$,

$$(a+bx^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{a^{\frac{u}{v}} z^u}{(z^v-b)^{\frac{u}{v}}},\ x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^v-b)^{\frac{m}{n}}};$$

donc $x^{m-1}\,dx = \frac{-v a^{\frac{m}{n}} z^{v-1}\,dz}{n(z^{v}-b)^{\frac{m}{n}+1}}$; donc la formule proposée se change en celle-ci $\frac{-v a^{\frac{m}{n}+\frac{u}{v}} z^{u+v-1}\,dz}{n(z^{v}-b)^{\frac{m}{n}+\frac{u}{v}+1}}$ qui sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n}+\frac{u}{v}$, sera un nombre entier.

Ainsi l'on peut rendre rationnelle la différentielle proposée toutes les fois que $\frac{m}{n}$ & $\frac{m}{n}+\frac{u}{v}$, sont des nombres entiers.

10. Si l'on a une formule différentielle $X\,dx$, X étant une fonction de x qui ne contienne que des fonctions fractionnaires $(e+fx)^{\frac{m}{n}}$, $(e+fx)^{\frac{u}{v}}$, &c. du binome $e+fx$, on la rendra rationnelle en supposant $e+fx=z$: car par cette substitution, l'on a $x=\frac{z-e}{f}$, $dx=\frac{dz}{f}$, $(e+fx)^{\frac{m}{n}}=z^{\frac{m}{n}}$, $(e+fx)^{\frac{u}{v}}=z^{\frac{u}{v}}$.

Donc si $X=\left((e+fx)^{\frac{m}{n}}+(e+fx)^{\frac{u}{v}}+\text{\&c.}\right)^{p}$, p étant un nombre entier, l'on aura $X=(z^{\frac{m}{n}}+z^{\frac{u}{v}}+\text{\&c.})^{p}$, qu'on rendra rationnelle par la méthode ci-dessus (7). Si les binomes étoient multipliés les uns par les autres, & qu'il n'y en eût que deux, l'on auroit $X=z^{\frac{m}{n}+\frac{u}{v}}=z^{s}$, en faisant $\frac{m}{n}+\frac{u}{v}=s$, & la formule proposée seroit $=\frac{1}{f}\cdot z^{s}\,dz$, qui est intégrable algébriquement toutes les fois que s n'est

pas $= -1$. Si s étoit $= -1$, son intégrale seroit $\frac{1}{f} \cdot L \cdot z$.

Si outre les fonctions fractionnaires dont on vient de parler X, contenoient encore des fonctions rationnelles de x, il est aisé de voir qu'on pourroit la rendre rationnelle par la même méthode. De même si X ne contenoit que des fonctions rationnelles de x, & des puissances fractionnaires $\left(\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{m}{n}} \pm \left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{u}{v}} \pm \&c.\right)^p$ De la quantité $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)$, combinées ensemble par addition, ou par soustraction, on rendroit la formule rationnelle en faisant $\frac{e+fx}{a+bx} = z$: car on auroit $x = \frac{az-e}{f-bz}$, $dx = \frac{adz(f-bz)+bdz(az-e)}{(f-bz)^2}$. En supposant pour plus de simplicité, que X ne contienne que les formules $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{m}{n}}$ & $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{u}{v}}$, p étant toujours un nombre entier, la formule deviendra

$$\left(z^{\frac{m}{n}} \pm z^{\frac{u}{v}}\right)^p \times \frac{adz(f-bz)+bdz(az-e)}{(f-bz)^2};$$

donc on pourra la rendre rationnelle par la méthode ci-dessus (7): car en prenant un nombre h qui soit exactement divisible par n & v, & faisant $z = y^h$, h étant le nombre dont on vient de parler, la formule différentielle qu'on vient de trouver sera changée en une autre qui sera rationnelle, ou qui ne contiendra aucun exposant fractionnaire.

Si on vouloit intégrer une fraction radicale de la forme $\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{((a+bx^n)^m)}}$, m & n étant positifs & entiers, on feroit $a+bx^n = \frac{a}{1-bz}$, pour avoir $x^n = \frac{az}{1-bz}$.

ou $x = \left(\frac{az}{1-bz}\right)^{\frac{1}{n}}$, & $dx = \frac{a\,dz\,(1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n\,(az)^{\frac{n-1}{n}}}$;

donc $S.\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{\left((a+bx^n)^m\right)}} = S.\frac{(az)^{\frac{m-1}{n}}\,a\,dz\,(1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n(1-bz)^{\frac{m-1}{n}}\,\frac{(az)^{\frac{\text{[illegible]}-1}{n}}\,a^{\frac{m}{n}}}{(1-bz)^{\frac{m}{n}}}}$

$= S.\frac{a\,dz\,(az)^{\frac{m-n}{n}}\,(1-bz)^{-1}}{n\,a^{\frac{m}{n}}} = S.\frac{z^{\frac{m-n}{n}}\,dz}{1-bz}$. On fera ensuite $z = t^n$, pour avoir $z^{\frac{m}{n}} = t^m$, & $\frac{m}{n} z^{\frac{m-n}{n}}\,dz = m\,t^{m-1}\,dt$; donc $S.\frac{z^{\frac{m-n}{n}}\,dz}{1-bz} = S.\frac{m\,t^{m-1}\,dt}{1-bt^n}$; mais $\frac{m\,t^{m-1}\,dt}{1-bt^n}$, est une fraction rationelle qu'on pourra intégrer facilement, ou par les séries, ou par la méthode des fractions rationnelles dont nous parlerons dans la suite.

DE L'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

11. Lorsque par la substitution, l'on ne pourra pas parvenir à donner à une formule différentielle une forme sous laquelle elle paroisse intégrable, algébriquement, ou par les logarithmes, on pourra avoir recours aux séries.

Soit la différentielle $\frac{b^3\,dx}{b^3 - x^3}$, qu'on ne peut

intégrer algébriquement. Je fais $\frac{b^3 dx}{b^3 - x^3} = b^3 dx.(b^3 - x^3)^{-1}$. J'élève $b^3 - x^3$ à la puissance -1 par la formule du binome de Newton, en supposant dans la formule $(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b +$ &c., $a = b^3$ & $b = -x^3$, $m = -1$, & j'ai, en multipliant ensuite tous les termes par $b^3 dx$, la série $dx + \frac{x^3 dx}{b^3} + \frac{x^6 dx}{b^6} + \frac{x^9 dx}{b^9}$ &c.; donc l'intégrale de la formule proposée sera $= x + \frac{x^4}{4b^3} + \frac{x^7}{7b^6} + \frac{x^{10}}{10b^9}$ &c, série convergente, en supposant $b > x$. Si $x > b$, on réduira $(-x^3 + b^3)^{-1}$ en série en prenant x^3 pour le premier terme. Pour cela on changera la formule proposée en $\frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = -b^3 dx.(x^3 - b^3)^{-1}$, & l'on aura x^3 pour le premier terme du binome qu'on veut élever à la puissance -1; l'on multipliera ensuite tous les termes par $-b^3 dx$, & l'on aura en intégrant, $S.\frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = \frac{b^3}{2x^2} + \frac{b^6}{5x^5} + \frac{b^9}{8x^8} + \frac{b^{12}}{11x^{11}}$ &c.

12. Au lieu de se servir du binome de Newton pour trouver les séries, l'on peut employer une méthode élégante dont se servent plusieurs analystes pour intégrer les formules différentielles, voici en quoi elle consiste. On divise la formule proposée

en deux facteurs, dont l'un contienne la différentielle & soit intégrable, & dont l'autre contienne la variable finie ; on intégre le premier facteur comme si l'autre étoit constant, & l'on différentie ensuite le résultat, ce qui donne la différentielle proposée avec une autre formule qui vient de la différentiation de l'autre facteur. Si l'on ajoute cette derniere formule à la proposée, & qu'on l'en retranche en même tems, l'on aura une formule qui en contient trois & dont les deux premieres sont absolument intégrables. Si la troisième a de l'affinité avec la proposée, & qu'on puisse la traiter par la même méthode, on la changera en trois formules, dont les deux premieres seront intégrables, & dont la troisième pourra être traitée de même, & ainsi successivement, l'on formera la série cherchée. Mais il sera plus élégant de prendre une formule générale, qui étant différentiée donne deux formules qui aient de l'affinité ; car par ce moyen, en déterminant les coëfficiens indéterminés, l'on a une série plus simple.

13. Soit la formule $\frac{dx}{a^3 + x^3}$ qu'on veut réduire en série. En regardant $\frac{1}{a^3 + x^3}$ comme un facteur constant, & intégrant l'on a $\frac{x}{a^3 + x^3}$. Je différencie maintenant cette formule que j'écris ainsi $x \times \frac{1}{a^3 + x^3}$, & j'ai $\left(\frac{dx}{a^3 + x^3} - \frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2}\right)$. Si j'integre, j'aurai $\frac{x}{a^3 + x^3}$; donc si je distribue

la formule propoſée de la maniere ſuivante $\frac{dx}{a^3+x^3} - \frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$, * les deux premiers termes donneront une intégrale algébrique. La troiſième formule eſt ſemblable à la formule propoſée & n'en differe que par les expoſans, puiſque celui de x dans le numérateur eſt augmenté de trois unités (car $dx = x^0 dx$), tandis que l'expoſant du dénominateur ($a^3 + x^3$) eſt augmenté d'une unité ; c'eſt pourquoi j'intègre en ſuppoſant $\frac{1}{(a^3+x^3)^2}$ conſtant, ou ce qui revient au même, en ſuppoſant le facteur $\frac{1}{(a^3+x^3)^2}$ conſtant, comme la premiere fois, ce qui donne $\frac{3x^4}{4.(a^3+x^3)^2}$. Différentiant cette intégrale (qui n'eſt pas la véritable), il vient $\frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} - \frac{2.3^2.x^6dx}{4(a^3+x^3)^3}$; ainſi il faut diſpoſer la 3e formule de cette maniere $\frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} - \frac{2.3^2x^6dx}{4(a^3+x^3)^3} + \frac{2.3^2x^6dx}{4(a^3+x^3)^3}$. Les deux premieres formules priſes enſemble ont une intégrale algébrique, & la troiſième peut être traitée par la même méthode ; ainſi en répétant les opérations on trouvera la ſérie cherchée.

* La ſeconde formule a le ſigne —, & la troiſième le ſigne +; parce que pour ajouter à b la quantité $-a$, & pour l'en retrancher en même tems, on peut écrire $b - a + a$.

14.

14. Mais pour avoir la série d'une manière plus élégante, je me sers de la formule générale $\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}$, dont je prends la différentielle de cette manière : $d\left(\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}\right)^* = \frac{(3p+1).x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} - \frac{3qx^{3p+3}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}}$; donc $S.\frac{x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} = \frac{1}{3p+1} \times \frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q} + \frac{3q}{3p+1} \times S.\frac{x^{3p+3}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}}$. (A).

Cela posé, je suppose $p=0$ & $q=1$ (pour avoir $x^{3p}dx = x^0 dx = dx$), & j'ai $S.\frac{dx}{(a^3+x^3)} = \frac{x}{a^3+x^3} + 3S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$ (B); (car $q+1=2$). Je fais ensuite $p=1$ & $q=2$, & par la formule (A), j'ai $S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{4}.\frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3.2}{4}S.\frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3}$. Supposez ensuite $p=2$ & $q=3$, la formule A donnera $S.\frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3} = \frac{1}{7}.\frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} + \frac{3.3}{7}.S.\frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4}$. Si on fait $p=3$ & $q=4$, l'on aura $S.\frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4} = \frac{1}{10} \times \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3.4}{10}S.\frac{x^{12}dx}{(a^3+x^3)^5}$, & ainsi de suite, l'on pourra continuer tant qu'on voudra.

Enfin dans la première substitution B écrivez au lieu de $S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$, sa valeur donnée par la seconde substi-

* La lettre d indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité renfermée dans la paranthèse.

tution, & ensuite à la place de S. $\frac{x^6 dx}{(a^3+x^3)^3}$, sa valeur que donne la troisième substitution, & ainsi de suite & l'on aura S. $\frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{x}{a^3+x^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3^2 \cdot 2}{4 \cdot 7} \cdot \frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} + \frac{3^3 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 7 \cdot 10} \cdot \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} \times \frac{x^{13}}{(a^3+x^3)^5}$ &c.

USAGE DES QUADRATURES ET DES RECTIFICATIONS DES COURBES DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

15. Il n'y a aucune formule différentielle qu'on ne puisse construire par la quadrature supposée d'une courbe. Soit une formule B dx, dans laquelle B soit une fonction de x, qu'on la réduise à une dimension linéaire, en la multipliant s'il le faut, ou en la divisant par des constantes, si B est une puissance 3ᵉ, par exemple, on la divisera par a^2. La formule étant ainsi préparée, supposons B linéaire $\&= y$ & décrivons la courbe dont les co-ordonnées sont x, & $y =$ B. Si F M (Fig. 1ere.) est la courbe demandée, en faisant A P $= x$, P M $= y =$ B, l'on aura l'élément de cette courbe $= y\,dx =$ B dx. Donc S. B dx sera égale à l'aire A F P M. Donc on aura l'intégrale par le moyen de cette aire.

Si l'on demande l'intégrale S. B dx pour le cas de $x = a$, l'on prendra A P $= a$, & l'aire A F M P donnera l'intégrale cherchée.

Soit supposée B $= \sqrt{(2ax - xx)}$, la différentielle B dx sera $= dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Comme B

eſt ici linéaire, on ne fera aucune multiplication ni aucune diviſion, ſuppoſez $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, & décrivez la courbe de cette dernière équation, qui ſera un demi-cercle AMD (Fig. 2), dont le diamètre $= 2a$; donc $S. Bdx = S. ydx = S. dx . \sqrt{(2ax - xx)}$ eſt égal au ſegment AMP, AP étant x, & PM $= y$. Si la formule avoit été $adx . \sqrt{(2ax - xx)}$, on l'auroit diviſée par a; mais on auroit enſuite multiplié l'intégrale par a; de ſorte que l'intégrale auroit été égale au produit de a par le ſegment APM.

Soit la formule $Bdx = dx . \sqrt{(2ax + xx)}$; ayant décrit une hyperbole équilatère AM (Fig. 3), dont le demi-axe CA $= a$, l'eſpace AMP ſera $= S. dx . \sqrt{(2ax + xx)}$.

16. Soit la formule $\frac{dx . x^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, qu'on multipliera par a, pour avoir $\frac{adx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$; faites $\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = B = y$ & décrivez la courbe de cette équation, cette courbe eſt du troiſième ordre. Suppoſons que AM (Fig. 4) ſoit cette courbe dans laquelle AP $= x$ & PM $= y$, l'on aura l'eſpace APM $= S. \frac{adx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, & $S. \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{APM}{a}$. Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{a^2 + x^2}$, on la multiplieroit par a^3; & l'on auroit $\frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$. Suppoſez $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ & décrivez la courbe BM

M 2

(Fig. 5) de cette équation. Dans cette courbe AP $= x$ & PM $= y$, l'espace ABPM sera $= S. \frac{a^3 dx}{a^2 + x^2}$; donc $S. \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{ABMP}{a^3}$.

Soit la formule $\frac{aadx}{b+x}$, l'on aura l'intégrale $S. \frac{aadx}{b+x}$, par le moyen d'une hyperbole entre ses assymptotes. Voyez la section précédente (8).

Soit la formule $\frac{dx}{bb+x^2}$. Je multiplie cette formule par b^3 pour avoir $\frac{b^3 dx}{b^2+x^2} = b^3 . (b^2+x^2)^{-1}$. Or, section précédente (14), $\frac{dx}{2} . a^3 (a^2+x^2)^{-1}$; est l'élément d'un secteur de cercle, dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$. Donc si l'on fait AC (Fig. 2) $= b$, A$b = x$, le secteur CAM sera $= \frac{1}{2} S. \frac{b^3 dx}{b^2+x^2}$; mais $S. \frac{dx}{b^2+x^2}$ est $= \frac{2.CAM}{b^3}$.

Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{g+x^2}$, en faisant $g = a^2$ (ce qui peut se faire en supposant qu'on ait multiplié g par 1 afin qu'il devienne a^2, pour avoir $1 : a :: a : g = \frac{aa}{1} = a^2$), l'on auroit la formule $\frac{dx}{aa+xx}$, qu'on multiplieroit par $\frac{a^3}{2}$ afin d'avoir $\frac{a^3 dx}{2 . (a^2+x^2)}$, dont l'intégrale est un secteur de cercle, dont la tangente $= x$ & le rayon $= a$.

Si l'on avoit la formule $x^{\frac{3}{2}}.(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$, on la construiroit par le moyen d'une cissoïde. Voyez la section précédente (16).

La formule $x^x dx$ se construit par le moyen d'une courbe exponentielle dont l'ordonnée $y = x^x$. Voyez la section précédente (17).

La formule $\frac{yydv}{\sqrt{(yy+aa)}}$ dépend de la quadrature de l'hyperbole; il en est de même de la formule $\frac{yydy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Mais la formule $\frac{yydy}{\sqrt{(aa-yy)}}$ dépend de la quadrature du cercle. Voyez la section précédente (21).

17. Il n'est pas nécessaire pour intégrer de construire la courbe dont l'abscisse est x, il sera même souvent utile de choisir un facteur différentiel qui soit intégrable algébriquement, & de faire son intérable $= z$, z étant l'abscisse de la courbe qu'on doit décrire, en faisant l'autre facteur $= y$, y étant l'ordonnée de la même courbe. Ainsi dans la formule $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, dont on a parlé ci-dessus (16), ayant fait la multiplication par $\frac{a}{a}$ pour avoir $\frac{adx.\sqrt{x}}{a.\sqrt{(a-x)}} = \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{ax}}{a.\sqrt{(a-x)}}$, je fais $\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{(a-x)}} = dz$; & en intégrant & ajoutant une constante arbitraire, j'ai $C - \sqrt{a}.\sqrt{(a-x)} = z$, & en faisant $C = a$, je trouve $a - \sqrt{(aa-ax)} = z$, $a - z = \sqrt{(aa-ax)}$, ou $\frac{(a-z)^2}{a} = a - x$. Faites maintenant $\sqrt{ax} = y$, ou $ax = y^2$, ou $x = \frac{y^2}{a}$, & l'équation de la courbe dont l'abscisse est z & l'ordonnée y

sera $\frac{(a-z)^2}{a} = a - \frac{y^2}{a} = \frac{aa-y^2}{a}$, ou $(a-z)^2 = aa - yy$, ou $aa - 2az + z^2 = aa - yy$, ou $2az - z^2 = y^2$. C'est pourquoi si avec le rayon $CA = a$ je décris un cercle AMBD (Fig. 2), dans lequel on fasse $AP = z = a - \sqrt{(aa - ax)}$ & l'ordonnée $PM = y = \sqrt{(ax)}$, l'on aura $S. \frac{adx\sqrt{x}}{2.\sqrt{(a-x)}} = AMP$. Donc $S. \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{2.AMP}{a}$. L'intégrale de la formule $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ dépendant de la quadrature du cercle, la quadrature de la courbe AM (Fig. 4), par le moyen de laquelle on a construit la même formule dépendra aussi de la quadrature du cercle & l'espace infiniment long ABHD, sera égal au double d'un quart de cercle dont le rayon $= a$.

Soit la formule $-\frac{dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$, je la multiplie par a^3 pour rendre linéaire le multiplicateur de dx, & je prends ensuite le facteur $\frac{-aadx}{x^2}$, dont l'intégrale algébrique est $\frac{a^2}{x}$, que je fais $= z$; donc $x = \frac{a^2}{z}$. Je fais ensuite $\frac{a}{x}\sqrt{(aa-xx)} = y$. Pour décrire la courbe des co-ordonnées z & y, il faut déterminer sa nature; pour cela je substitue dans la derniere équation la valeur de x donnée par l'avant-dernière, & j'ai $\frac{z}{a}\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{zz}\right)} = \sqrt{(zz - aa)} = y$, équation à l'hyperbole équilatère. C'est pourquoi avec le demi-axe $CA = a$, je décris l'hyperbole équilatère AM (Fig. 3), je prends sur le premier axe l'abscisse $CP = z = \frac{aa}{x}$ & ayant mené l'ordonnée PM, j'ai l'espace $APM = S. \frac{-a^3 dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$,

& S. $\frac{-dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3} = \frac{APM}{a^3}$. Ainsi pour chaque valeur de x l'on pourra connoître la valeur de z, & celle de S. $\frac{-dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$.

18. Il sera quelquefois plus élégant de construire par les quadratures, non la formule proposée, mais une autre formule, qui étant ajoutée à la premiere, donnera une formule différentielle algébrique, de l'intégrale de laquelle retranchant l'intégrale de la formule ajoutée, il restera l'intégrale de la proposée.

Pour faire comprendre cet artifice, soit la formule proposée ydx; intégrez comme si y étoit constant & vous aurez yx; prenez la différentielle de cette intégrale & vous trouverez $d(yx) = xdy + ydx$. Ainsi xdy est la formule qu'on ajoutera à la proposée. Donc $yx =$ S. $xdy +$ S. ydx, & $yx -$ S. $xdy =$ S. ydx; Donc si par les quadratures vous trouvez S. xdy, & que vous retranchiez cette quantité de yx, vous aurez l'intégrale de la formule proposée.

Soit la formule $\frac{-x^4dx}{(x^2+aa)^{\frac{3}{2}}}$, que vous pourrez disposer ainsi $x^3 \frac{-xdx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$; intégrant maintenant comme si x^3 étoit constant, l'on a $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$; la différentielle de celle-ci est $d\left(\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}\right)$ ou $\frac{-x^4dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$;

donc $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}} =$ S. $\frac{-x^4dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + 3$ S. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$,

ou $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}} - 3$. S. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(xx+aa)}} =$ S. $\frac{-x^4dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$.

Intégrons par les quadratures la formule $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$.

Pour cela je suppose $\frac{x\,dx}{\sqrt{(xx+aa)}} = dz$, afin d'avoir $\sqrt{(xx+aa)} = z$, & $x = \sqrt{(zz-aa)}$. Faites $x = y$ & décrivez la courbe des co-ordonnées x & y (dont l'équation est $zz - aa = xx = yy$, qui appartient à l'hyperbole équilatère). Avec le demi-axe CA $= a$, ayant décrit l'hyperbole équilatère AM (Fig. 3), prenez CP $= z = \sqrt{(xx+aa)}$, & ayant mené l'ordonnée PM, vous aurez S. $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}} =$ APM. Donc si on retranche le triple de cet espace de l'intégrale algébrique $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura l'intégrale de la formule proposée $\frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$.

Parlons maintenant de la construction des formules différentielles par le moyen des rectifications.

19. La méthode de construire les formules différentielles par la rectification des courbes paroît préférable à la construction par les quadratures; car si l'on décrit la courbe Am (Fig. 4), dont l'arc AM est supposé égal à l'intégrale d'une différentielle proposée, en enveloppant cet arc avec un fil, l'on aura facilement la longueur de cet arc, & par conséquent la valeur de l'intégrale cherchée.

Si l'on a la différentielle $p\,dx$, dans laquelle p est une fonction algébrique de x, que nous supposerons réduite à une dimension linéaire (ce qu'on peut toujours obtenir en multipliant ou en

divisant par une constante), il s'agit de réduire cette formule différentielle en une autre qui exprime l'élément d'un arc d'une courbe algébrique. Supposons que les co-ordonnées perpendiculaires de la courbe cherchée sont y & u, l'élément de l'arc de la courbe sera $= \sqrt{(dy^2 + du^2)}$; donc l'on doit avoir $p\,dx = \sqrt{(dy^2 + du^2)}$ & $pp\,dx^2 = dy^2 + du^2$. Cette équation fait voir que la formule $p^2\,dx^2$ doit être partagée en deux parties dont les racines quarrées soient réelles & intégrables algébriquement & dont l'une soit $= dy$ & l'autre $= du$; leurs intégrales y & u seront les co-ordonnées de la courbe cherchée.

20. Soit la formule $p\,dx = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a}dx$; donc $p = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a}$; $p^2 dx^2 = \frac{4x^2 dx^2}{aa} + dx^2 = dy^2 + du^2$. Faisant $\frac{4x^2 dx^2}{aa} = dy^2$, & $dx^2 = du^2$, l'on a $\frac{2x\,dx}{a} = dy$, & $dx = du$. Donc en intégrant, $\frac{x^2}{a} = y$, & $x = u$. Par conséquent $\frac{uu}{a} = y$, ou $uu = ay$, équation à une parabole, dont le paramètre $= a$; donc S. $\frac{dx \,.\, \sqrt{(4xx + aa)}}{a}$ s'obtient par la rectification d'un arc de parabole. Soit A M (Fig. 6) une parabole dont le paramètre $= a$, l'abscisse A P $= y$, l'ordonnée P M $= u$, l'équation de cette parabole sera $u^2 = ay$.

& parce qu'on a trouvé $u = x$ & $\frac{x^2}{a} = y$, si l'on prend l'abscisse A P $= \frac{x^2}{a}$ ou $= \frac{uu}{a}$, l'on aura pour chaque valeur de x l'intégrale de la différentielle proposée. Si, par exemple, on fait $x = a$, & qu'on fasse $y =$ AP $= \frac{x^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, l'intégrale correspondante à $x = a$, dépendra de la rectification de l'arc A M.

Soit la formule $\frac{dx\sqrt{(m^2x^{2m-2} + a^{2m-2})}}{a^{m-1}}$ qu'on veut réduire à la rectification d'une courbe algébrique. J'élève au quarré le multiplicateur de dx, pour avoir $\frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}} + 1$. Je divise cette quantité en deux parties $\frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}}$ & 1, dont je prends les racines quarrées $\frac{m\ x^{m-1}}{a^{m-1}}$ & 1. Multipliant les racines par dx, j'ai les formules $\frac{mx^{m-1}dx}{a^{m-1}}$ & dx, qui sont toutes les deux intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration l'on a $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ & x; si je fais la première $= u$ & la seconde $= y$, il viendra $x = y$ & $\frac{x^m}{a^{m-1}} = u$, ou $\frac{y^m}{a^{m-1}} = u$, ou $y^m = a^{m-1}u$, équation qui appartient aux paraboles, ou aux hyperboles de tous les genres, selon que m est un nombre positif ou négatif, on suppose que m n'est pas $= +1$, autrement cette équation seroit à la ligne droite.

Ainsi la formule proposée s'intègre par un arc de ces courbes.

Soit la formule $pdx = dx\left(\frac{x}{a} + \frac{b}{a} + \frac{x^3}{aac}\right)^{\frac{1}{2}}$; élevant au quarré le multiplicateur de dx & le partageant en deux quarrés $\frac{x}{a} + \frac{b}{a}$, $\frac{x^3}{a^2c}$ *; multipliant leurs racines (qui sont toutes les deux réelles) par dx, l'on a $dx\frac{\sqrt{(x+b)}}{\sqrt{a}}$, $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{c}}$, qui étant intégrées & égalées, la première à u & la seconde à y, donneront $\frac{2}{3}.\frac{(x+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} = u$; $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a\sqrt{c}} = y$. Ainsi l'intégrale de la formule proposée sera égale à un arc de la courbe des coordonnées u & y.

21. Il est quelquefois à propos d'ajouter au quarré de la formule proposée & d'en retrancher en même tems une autre différentielle afin de réduire plus facilement la formule à la rectification d'une courbe algébrique.

Soit la formule $\frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$; l'ayant élevée au

* Rien n'empêche de considérer ces quantités comme des quarrés, quoiqu'on n'en puisse pas extraire des racines algébriques.

quarré, j'ajoute & je retranche $\frac{(ax-xx).dx^2}{ax-xx}$, pour avoir $\frac{(\frac{1}{4}a^2-ax+x^2+ax-x^2)}{ax-xx}dx^2$. Je partage maintenant cette formule, comme on le voit ici $\frac{(\frac{1}{2}a-x)^2dx^2}{ax-xx}$, dx^2, dont les racines sont $\frac{(\frac{1}{2}a-x)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, & dx, toutes les deux réelles & intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration, il vient $\sqrt{(ax-xx)}$, & x. En faisant $\sqrt{(ax-xx)}=y$, & $x=u$, on trouvera $\sqrt{(au-uu)}=y$, ou $au-uu=y^2$, équation au cercle; donc l'intégrale de la formule proposée, s'obtient par un arc de cercle. Lorsque $u=x$ est plus grand que a, la différentielle proposée est imaginaire, aussi bien que son intégrale.

22. Il arrive rarement que l'intégrale de la formule pdx soit égale à un arc d'une courbe algébrique; mais cette intégrale est très-souvent égale à un arc de courbe algébrique, en ajoutant ou retranchant une quantité algébrique. Ainsi il est permis d'ajouter à la formule pdx une formule différentielle qdx intégrable algébriquement. Pour déterminer la différentielle qu'on doit ajouter à la formule proposée pour qu'il en résulte une formule dont on puisse distribuer le quarré en deux parties, dont les racines soient réelles & algébriquement intégrables, nous établirons le théoréme suivant.

23 THEOREME. *Si ayant supposé $dx=sdp$ (s ne désigne point l'intégrale de dp), on décrit la courbe des co-ordonnées $s.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$, $s.(p-p^3)-x$, l'arc de cette courbe, que j'appellerai* L, *sera* $=s.(1-pp)-$ S. pdx. Qu'on prenne les différentielles des co-ordon-

nées, l'on aura $ds.(1-pp)^{\frac{3}{2}} - 3s.pdp.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$, $ds.(p-p^3)+sdp-3ppdp-dx$. En substituant dx au lieu de sdp, ces différentielles se réduisent facilement aux suivantes $(1-pp)^{\frac{1}{2}}.(ds(1-pp)-3pdx)$, $p(ds(1-pp)-3pdx)$. Si l'on prend la somme des quarrés de ces différentielles, l'on trouve $(ds(1-pp)-3pdx)^2$, dont la racine $ds(1-pp)-3pdx$, sera l'élément de l'arc L ou sera $=dL$. Ajoutant & retranchant la quantité différentielle $sd(1-pp)$, l'on a $ds.(1-pp)+sd(1-pp)+2spdp-3pdx=dL$. Je substitue $2dx$ au lieu de $2sdp$, pour avoir $ds(1-pp)+sd(1-pp)-pdx=dL$; donc en intégrant l'on a $s(1-pp)-Spdx=L$, ce qu'il falloit démontrer; donc $Spdx=L-s(1-pp)$; ainsi l'intégrale de la différentielle pdx est égale à l'arc L, moins la quantité $s(1-pp)$. On doit remarquer que l'on peut prendre positivement ou négativement les co-ordonnées; car il en résultera toujours le même quarré, puisque le quarré d'une quantité négative est toujours positif. Ainsi la somme des quarrés des différentielles des co-ordonnées sera toujours le même & $=(dL)^2$. De même lorsqu'on prend la racine dL, il est incertain si cette racine doit avoir le signe + ou le signe −; c'est pourquoi il sera à propos de donner à l'arc L le double signe ± & de déterminer ensuite lequel des deux doit avoir lieu. On doit se souvenir de ne pas omettre d'ajouter une constante.

Soit la formule $\frac{adx}{x}$ qu'on veut réduire à la rectification d'un arc d'une courbe algébrique. En comparant nous avons $p=\frac{a}{x}$; donc $dp=\frac{-adx}{xx}$, & $s=\frac{dx}{dp}$ $=-\frac{x^2}{a}$, $1-pp=1-\frac{aa}{xx}=\frac{xx-aa}{xx}$, $s.(1-pp)$ $=-\frac{1}{a}(xx-aa)$. Les co-ordonnées de la courbe

cherchée sont donc $-\left(\frac{(xx-aa)^{\frac{1}{2}}}{ax}\right)$, $\frac{-2xx+aa}{x}$, ou (en prenant les co-ordonnées avec des signes contraires) $\frac{(xx-aa)^{\frac{1}{2}}}{ax}$, $\frac{2xx-aa}{x}$; donc par le théorême l'on aura $-\frac{1}{a}(xx-aa)\mp L = S.\frac{adx}{x}$. Pour savoir quel signe l'on doit prendre, prenez la somme des quarrés des différentielles des co-ordonnées & vous aurez $\left(\frac{4x^4+4a^2x^2+a^4}{aaxx}\right).dx^2 = (dL)^2$; & en prenant les racines, $dx\left(\frac{2x^2+a^2}{ax}\right) = dL$. Différenciez $-\frac{1}{a}.(xx-aa)$ pour avoir $-\frac{2xdx}{a}$, quantité qui étant ajoutée avec $dx\left(\frac{2x^2+aa}{ax}\right)$, donne la formule proposée $\frac{adx}{x}$; donc dL doit avoir le signe + aussi bien que L, & la véritable formule sera $-\frac{1}{a}(xx-aa)$ $+L = S.\frac{adx}{x}$.

Le théorême précédent est inutile toutes les fois que $pp > 1$; car alors la co-ordonnée $s.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$ est imaginaire. Pour remédier à cet inconvénient, voici la méthode qu'on peut suivre : ayant fait $dx = sdp$; décrivez la courbe des co-ordonnées $s.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = y$, $s.(p^3-p) + x = u$; cela posé, l'on aura le théorême suivant.

$\int.\sqrt{(du^2-dy^2)}$ est $= s.(pp-1) + S.pdx$. Ce théorême se démontre comme le précédent. Car prenant les différentielles des co-ordonnées, l'on aura

$ds\,(pp-1)^{\frac{3}{2}} + 3\,s.pdp\,.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = dy$, $ds.(p^3-p) + 3\,sp^2\,dp - sdp + dx = du$. Substituez dans ces différentielles, dx au lieu de $s.\,dp$ & vous aurez $ds\,(pp-1)^{\frac{3}{2}} + 3\,pdx\,.(pp-1)^{\frac{1}{2}} = dy$, ou $(pp-1)^{\frac{1}{2}}\left(ds\,.(p^2-1) + 3\,pdx\right) = dy$, & $p\,.\left(ds(pp-1) + 3pdx\right) = du$. Élevez au quarré la valeur de dy, & celle de du, & vous aurez $(pp-1).\left(ds\,(pp-1) + 3pdx\right)^2 = dy^2$, $p^2 \times \left(ds.\,(pp-1) + 3pdx\right)^2 = du^2$; donc $du^2 - dy^2 = \left(ds.(pp-1) + 3pdx\right)^2$, & $ds.\,(pp-1) + 3\,pdx = \sqrt{(du^2 - dy^2)}$. J'ajoute au premier membre de cette équation & j'en retranche en même tems $s.\,d\,(pp-1)$, & j'ai $ds\,.(pp-1) + sd\,(pp-1) - 2\,spdp + 3pdx = \sqrt{(du^2 - dy^2)}$ *, ou (en substituant dx au lieu de sdp) $ds.\,(pp-1) + sd(pp-1) + pdx = \sqrt{(du^2 - dy^2)}$; donc en intégrant, on a (A) $s\,(pp-1) + S\,pdx = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$. Ce théorême est de Ricati, & le précédent a été trouvé par Jean Bernoulli.

Servez-vous du théorême de Bernoulli pour intégrer la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$, par la rectification d'un courbe algébrique. Pour cela suppofez $dy = qdu$ & la formule deviendra $du\,\sqrt{(1-qq)}$, dans laquelle $qq < 1$, parce que du^2 est suppofé plus grand que dy^2. En effet, il est aisé de voir que la valeur qu'on a trouvée ci-dessus pour du^2, est plus grande que celle de dy^2 **.

* $s.\,d\,(pp-1) = s.\,2pdp = 2\,s.\,pdp$.

** Car en multipliant par pp, l'on a un plus grand produit qu'en multipliant par $pp-1$.

Supposons donc que la quantité qui, dans le théorême de Bernoulli, est représentée par p. Soit ici représentée par $\sqrt{(1-qq)}$, & que la quantité qui, dans le théorême de Bernoulli est x, soit ici u, celle qui est s dans le théoréme de Bernoulli sera ici appellée z; c'est pourquoi ayant introduit ces valeurs, l'on a $du = \frac{-zqdq}{\sqrt{(1-qq)}}$ *, & les co-ordonnées de la courbe seront zq^3, $zq^2\sqrt{(1-qq)} - u$. Enfin vous aurez $L = z.q^2 - S.\,du\sqrt{(1-qq)}$ ou $zq^2 - L = S.\,du\sqrt{(1-q^2)} = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$. Si l'on substitue cette valeur dans la formule A, il vient $s.(pp-1) + S.\,pdx = zq^2 - L$, ou $S.\,pdx = zq^2 - s.(pp-1) - L$, qui ne peut être troublée par aucune quantité imaginaire lorsque $pp > 1$. Ainsi l'on voit par les deux théorêmes précédens que toute formule différentielle algébrique; c'est-à-dire, qui ne renferme aucune quantité transcendante, peut être construite par la rectification d'une courbe algébrique.

24. PROBLEME. *Construire la formule* $\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$. L'on ne peut employer le théorême de Bernoulli, parce que en faisant $p = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$, l'on auroit $pp = \frac{x}{x-a}$ & $1 - pp = \frac{-a}{x-a}$, quantité négative (autrement $x-a$ seroit négative & $\sqrt{(x-a)}$, imaginaire aussi bien que la formule proposée); Ainsi il faut avoir recours au théorême de Vincent Ricati. L'on aura donc $pp - 1 = \frac{a}{x-a}$, $2pdp = \frac{-adx}{(x-a)^2}$, $dp = \frac{-adx}{2p.(x-a)^2} = \frac{adx}{x^{\frac{1}{2}}(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, à cause de $pp = \frac{a}{x-a}$

* Car dans le théorême de Bernoulli $dx = s.\,dp$; donc ici $du = zd\,(1-qq)^{\frac{1}{2}} = \frac{-zqdq}{\sqrt{(1-qq)}}$.

+ 1

$+ 1 = \frac{x}{x-a}$; ainsi $p = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x-a)}}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}.(x-a)^{\frac{3}{2}}}{a}$; donc $s.(pp-1) = 2.\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)}$.

De plus l'on trouve que les co-ordonnées de la courbe qu'on doit employer sont $2.\sqrt{ax} = y$, $-x = u$ ou $x = u$, en changeant le signe de x. Donc par le théorême, nous aurons $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} + S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ (B).

Construisons maintenant la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ par la rectification d'une courbe algébrique. Puisque $u = x$, & que y est $= 2\sqrt{ax}$, l'on aura $du = dx$, $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. Ainsi la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ devient $dx\sqrt{\left(1 - \frac{a}{x}\right)} = \frac{dx\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}$; donc $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, $1 - qq = \frac{x-a}{x}$,

$d\sqrt{(1-qq)} = \frac{a\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, $z = \frac{du}{d\sqrt{(1-qq)}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}.(x-a)^{\frac{1}{2}}}{a}$, & les co-ordonnées de la courbe seront $2\sqrt{a}.\sqrt{(x-a)}$, & $x - 2a$. Supposons cette courbe décrite & appellons L l'arc de cette courbe qu'on doit prendre de maniere que L croisse, x croissant. Ayant fait les substitutions convenables dans la formule $zq^2 - L = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$, il vient $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} - L = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$. C'est pourquoi, en substituant cette valeur de $S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ dans la formule B, on trouvera $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} + S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} - L$, ou $S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = -L$, ou $S.\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = L$; ce qui fait voir que la formule

proposée s'intègre par la rectification d'une courbe algébrique sans l'addition d'aucune quantité algébrique. Pour déterminer la courbe, je fais la co-ordonnée $2\sqrt{a}.\sqrt{(x-a)}=m$, & la co-ordonnée $x-2a=n$; donc $4a.(x-a)=mm$, $x-a=n+a$; donc $4a.(n+a)=mm$, équation à la parabole d'Appolonius. Avec le paramètre $4a$, je décris la parabole AM (Fig. 7), dont l'abscisse $AP=n+a$; donc ayant pris $Ai=a$, l'on aura $iP=n$, l'ordonnée PM étant $=m$. Je prolonge PA en D jusqu'à ce que $AD=a$, pour avoir $DP=n+2a=x$; c'est pourquoi les DP étant x, AM sera $=S.\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$.

RAMENER DANS CERTAINS CAS L'INTÉGRATION D'UNE FOMULE DIFFÉRENTIELLE A CELLE D'UNE AUTRE FORMULE DIFFÉRENTIELLE PLUS SIMPLE.

25. Soit proposé de réduire l'intégrale de $x^m dx\times(a+bx^n)^p$, à celle de $x^q dx(a+bx^n)^r$, en supposant $m>q$. Je prends la formule $x^{m+1}(a+bx^n)^p$, dont la différentielle est $(m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p+bnpx^{m+1}x^{n-1}\times dx(a+bx^n)^{p-1}$; donc $(m+1).S.dx.x^m(a+bx^n)^p=x^{m+1}\times(a+bx^n)^p-bnpS.x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}$, ou $S.dx.x^m(a+bx^n)^p=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$
$-\frac{bnp}{m+1}.S.x^{m+n}\times dx(a+bx^n)^{p-1}$.

De même $S.x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+n+1}-\frac{bn(p-1)}{m+n+1}\times$
$S.x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}$; donc l'on aura

$$S.x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1).(m+n+1)} + \frac{b^2n^2p.(p-1).S.x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1).(m+n+1)}.$$

& en continuant de même, il sera aisé de voir qu'en général l'on aura $S.x^m dx(a+bx^n)^p =$

$$\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1).(m+n+1)}$$

$$+ \frac{b^2n^2p.(p-1)x^{m+2n+1}(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1).(m+n+1).(m+2n+1)} \dots \&c.$$

$$\pm \frac{b^{t-1}n^{t-1}p.(p-1).(p-2)\dots(p-t+1)}{(1+m).(1+m+n).(1+m+2n)\dots[1+m+n(t-1)]} \times$$

$$x^{1+m+n(t-1)}(a+bx^n)^{p-t+1} \mp$$

$$S.x^{m+tn}dx(a+bx^n)^{p-t} \times \frac{b^t n^t p.(p-1)\dots(p-t+1)}{(1+m).(1+m+n)\dots[1+m+n.(t-1)]}.$$

Le signe supérieur a lieu lorsque t est un nombre entier positif impair; & le signe inférieur, lorsque t est un nombre entier positif, mais pair. Maintenant si $p-t=r$, ou si $p-r=t$, nombre entier, l'intégrale de $x^m dx(a+bx^n)^p$, se réduira à celle de $x^{m+tn}dx(a+bx^n)^r$; & si $t=\frac{q-m}{n}$ est un nombre entier positif, on réduira l'intégrale de la formule proposée à celle de la formule $x^q dx(a+bx^n)^r$: car alors on aura $q=m+tn$.

26. Mais l'intégrale de $x^{m+rn}dx\,(a+bx^n)^r$ se réduit à l'intégrale de $x^h\,dx\,(a+bx^n)^r$, lorsque $\frac{m+rn-h}{n}$, ou lorsque $\frac{m-h}{n}$, est un nombre entier positif; c'est-à-dire, lorsque la différence des exposans des variables hors du binome étant divisée par l'exposant de la variable dans le binome, donne un nombre positif, & pour le faire voir prenez la quantité $x^{q+1}\,(a+bx^n)^{p+1}$, dont la différentielle est $(q+1).x^q\,dx(a+bx^n)^{p+1}+dx.bn.(p+1)\times x^{q+1+n-1}\,(a+bx^n)^p$, ou $(qa+a)x^q\,(a+bx^n)^p\,dx+(qbx^n+bx^n)x^q\,(a+bx^n)^p\,dx+bn.(p+1)\times x^{q+n}\,dx\,(a+bx^n)^p=(aq+a).x^q\,dx(a+bx^n)^p+(bnp+bn+qb+b).x^{q+n}dx\,(a+bx^n)^p$. Donc

$$S.\,x^{q+n}\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+n+q+1)}-\frac{a\,(q+1)\,S.\,x^q\,dx(a+bx^n)^p}{b.(np+n+q+1)}.$$

Supposons maintenant qu'on veut réduire l'intégrale de $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, à celle de $x^n\,dx\,(a+bx^n)^p$. Je fais $q+n=m$, ou $q=m-n$, pour avoir

$$S.\,x^m\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-n}\,(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(np+m+1)}-\frac{a\,(m-n+1)}{b\,(np+m+1)}S.\,x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^p.$$

Par la même raison

$$S.\,x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(1+m+np-n)}-\frac{a(m-n+1).S.\,x^{m-2n}\,dx\,(a+bx^n)^p}{b\,(np+m+1-n)}.$$

Et en général on aura

$$S.\,x^m\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-n}\,(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(np+m+1)}-$$

$$\frac{a(1+m-n)x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2(np+m+1)(np+m+1-n)} +$$

$$\frac{a^2(1+m-n)(1+m-2n)x^{1+m-3n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3(np+m+1)(np+m+1-n)(np+m+1-2n)} \text{ \&c.}$$

$$\mp\frac{a^{t-1}(1+m-n)(1+m-2n)\ldots(1+m-n.\overline{t-1})x^{1+m-tn}(a+bx^n)^{p+1}}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\ldots\left(np+m+1-n.(t-1)\right)}$$

$$\pm\frac{a^t(1+m-n)(1+m-2n)\ldots(1+m-tn).S\, x^{m-tn}dx(a+bx^n)^p}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\ldots\left(np+m+1-n.(t-1)\right)}.$$

Le signe supérieur a lieu lorsque t est pair, & l'inférieur lorsque t est impair. Ainsi il est aisé de voir que si $m-tn=u$, ou si $m-u=tn$, ou si $t=\frac{m-u}{n}$, ou si la différence des exposans de x hors du binome divisée par l'exposant n de x dans le binome, donne un nombre entier positif, on pourra réduire l'intégrale de $x^m dx(a+bx^n)^p$ à celle de $x^u dx(a+bx^n)^p$, par le moyen de la formule précédente, ou en opérant comme on vient de le faire.

27. La formule S. $dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ dépend de la quadrature du cercle ; car en supposant le rayon CA (Fig. 2) $=1$, CP $=x$, Pp sera $=dx$, & $ydx=$ $dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'élément de l'aire CBMP ; ainsi S. $dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}=$ CBMP. Si l'on vouloit ramener S. $x^4dx(1-xx)^{\frac{5}{2}}$ à S. $dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$, l'on auroit $a=1$, $b=-1$, $m=4$, $n=2$, $p=\frac{5}{2}$, & l'on trouveroit par la méthode ci-dessus (25), S. $x^4dx(1-xx)^{\frac{5}{2}}$

$$=\frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{5x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 7}+$$

$\frac{5 \cdot 3 \cdot S. x^8 (1 - xx)^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 7}$. Par la méthode précédente (26), l'on a $S. x^8 dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x^7 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{7 x^5 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10 . 8} - \frac{7 \cdot 5 x^3}{10 . 8 . 6} (1 - xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4} . x . (1 - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4} . S. dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$; donc $S. x^4 dx (1 - xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5 (1 - xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7 (1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10 . 8} . x^5 (1 - xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5}{10 . 8 . 6} . x^3 (1 - xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4} . x (1 - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4}$ CBMP, en ſubſtituant la valeur de $S. dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, & faiſant attention au multiplicateur $\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ de $S. x^8 dx (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES.

28. On peut intégrer toutes les différentielles qui ne ſont pas abſurdes par les propriétés des courbes.

Soit la formule $\frac{-dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$, je fais cette formule $= dx$; mais par la ſection précédente (N°. 13), dans la tractrice l'élément de l'abſciſſe eſt $= \frac{-dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$; donc l'intégrale $- S. \frac{dy \sqrt{(aa - yy)}}{y}$ eſt égale à une abſciſſe correſpondante à l'ordonnée y d'une tractrice dont

la tangente $= a$. Soit maintenant la formule $\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$, l'on aura (par le N°. 21, section précédente) S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ $= x$, x étant l'abscisse de la courbe des sinus hyperboliques, & y l'ordonnée de la même courbe. L'on aura de même S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}} = x$, x étant l'abscisse de la ligne des co-sinus hyperboliques. Voyez l'endroit cité.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DU CERCLE.

29. Avant d'entrer en matière nous remarquerons que tous les cercles étant des figures semblables, leurs lignes homologues droites ou courbes comme les arcs semblables, les sinus, les co-sinus, les tangentes, les co-tangentes, les sécantes, les co-sécantes appartenans à des arcs semblables, sont dans le rapport des rayons de cercles; de sorte que si on nomme R le rayon des tables, r le rayon d'un cercle quelconque; p une des lignes dont on vient de parler, prise dans le cercle du rayon R, x la ligne homologue dans le cercle du rayon r, l'on aura $R : r :: p : x = \frac{rp}{R}$, & $p = \frac{Rx}{r}$. Donc si l'on connoit x dans le cercle dont le rayon est r, & qu'on connoisse p par les tables, l'on connoîtra la valeur de x dans le cerle dont le rayon est R, & réciproquement si on connoît p par les tables pour le cercle du rayon R, l'on connoîtra facilement la ligne homologue pour le cercle dont le rayon est r.

30. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a + cx^2}$ $= \frac{\frac{1}{c}\, dx}{\frac{a}{c} + x^2} = \frac{\frac{a\,dx}{a\,c}}{\frac{a}{c} + x^2}$ eſt $= \frac{s}{a}$; s étant un arc de cercle dont le rayon eſt $\sqrt{\frac{a}{c}}$ & la tangente x; car on a vu ci-deſſus, ſection précédente (31), que $\frac{a^2\,dx}{aa + xx}$ étoit l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$; donc ſi le rayon eſt $= \sqrt{\frac{a}{c}}$, la différentielle de l'arc ſera $= \frac{\frac{a}{c}\, dx}{\frac{a}{c} + xx}$; donc, &c.

S. $\frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{s}{a}$, s étant un arc de cercle AM (Fig. 2); donc le rayon $= a$; & l'abſciſſe $=$ AP (ou ſon ſinus verſe) $= x$; car $\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ eſt l'élément d'un tel arc (ſection précédente 31). S. $\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = s$, s étant un arc de cercle BM, dont le rayon $= a$, & le ſinus PC $=$ Mg $= x$; car les triangles ſemblables CPM, Mmn donnent PM : CM :: nm : Mm, ou $\sqrt{(aa - xx)} : a :: dx : \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$; donc, &c.

$S. \frac{ds}{s\sqrt{(ss - aa)}} = \frac{f}{a^2}$, f étant un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la ſécante $= s$.

$S. \frac{-adx}{(aa + xx)} = \frac{f}{a}$, f étant un arc de cercle dont la co-tangente $= x$; car on a vu dans la ſection précédente (21), que $\frac{a^2 ds}{s\sqrt{(ss - aa)}}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la ſécante $= s$, & que $-\frac{a^2 dx}{aa + xx}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la co-tangente $= x$; donc, &c. On peut auſſi remarquer que, ſelon ce qu'on a dit au même lieu, $S. \frac{-a^2 dy}{y\sqrt{(yy - aa)}}$ eſt $= f$, f étant un arc de cercle dont la co-ſécante $= y$.

DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

31. Si l'on a une équation d'une courbe réduite à cette forme $y = ax^m + bx^n + cx^p +$ &c. y ne peut être imaginaire, à moins qu'il n'y ait dans l'équation quelque expoſant pair, & que la quantité ſous cet expoſant ſoit négative. Toutes les quantités imaginaires de quelle eſpèce qu'elles ſoient peuvent ſe réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainſi qu'on va le démontrer après avoir établi les lemmes ſuivans.

32. LEMME I. $(\text{coſ.}\, p + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, p)^m = \text{coſ.}\, mp + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, mp$, *p étant un angle, ou*

arc dont le rayon $=1$, & m *un nombre quelconque* ; cette propoſition eſt une ſuite de ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage (voyez la Géométrie). Mais pour démontrer rigoureuſement que cela a lieu, en ſuppoſant même que m eſt un nombre ſourd tel que $\sqrt{3}$, par exemple, je prends les logarithmes hyperboliques (car c'eſt de ceux-là dont il s'agira toujours, à moins qu'on avertiſſe du contraire) de part & d'autre; ce qui donne $m\,\mathrm{L}.\,(\text{coſ}.\,p+\sqrt{-1}\,\text{ſin}.\,p) = \mathrm{L}.\,(\text{coſ}.\,mp+\sqrt{-1}\,\text{ſin}.\,mp)$. Différenciant * en regardant p comme variable, on aura (A) $\dfrac{-mdp\,.\,\text{ſin}.\,p+mdp\sqrt{-1}\,.\,\text{coſ}.\,p}{\text{coſ}.\,p+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,p}$

$$=\frac{-m\,dp\,\text{ſin}.\,mp+m\,dp\,.\sqrt{-1}\,.\,\text{coſ}.\,mp.}{\text{coſ}.\,mp+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,mp}$$

Multipliant les numérateurs par $-\sqrt{-1}$, il vient $\dfrac{m\,dp\,.\,(\text{coſ}.\,p+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,p)}{\text{coſ}.\,p+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,p}=$

$$\frac{m\,dp\,.\,(\text{coſ}.\,mp+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,mp)}{\text{coſ}.\,mp+\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,mp},$$ ou

$m\,dp=m\,dp$, équation identique ; ainſi l'équation (A), dont celle-ci eſt tirée eſt vraie ; donc, &c.

* Voyez vers le commencement de la premiere ſection comment il faut s'y prendre pour différencier les quantités logarithmiques, & celles qui renferment des ſinus & des co-ſinus.

33. LEMME II. *u étant un arc dont le rayon* $= 1$, *l'on aura* $u = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \text{L.}(\text{ſin.} u \sqrt{-1} + \text{coſ.} u)$. En multipliant par $\sqrt{(-1)}$. Et différenciant, il vient $du \cdot \sqrt{-1} = \frac{\text{coſ.} u \cdot du \sqrt{-1} - \text{ſin.} u, du}{\text{ſin.} u \sqrt{-1} + \text{coſ.} u}$, & (en diviſant par du, ôtant la fraction & faiſant attention que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$) $- \text{ſin.} u + \text{coſ.} u \sqrt{-1} = \text{coſ.} u \sqrt{-1} - \text{ſin.} u$, équation identique ; donc l'équation du lemme dont celle ci eſt tirée, eſt vraie.

34. THEORÊME. *Toutes les quantités imaginaires de quelque eſpece qu'elles ſoient, peuvent toujours ſe réduire à la forme* $M + N \sqrt{-1}$, *M & N étant des quantités réelles (M peut auſſi être* $= 0$). Nous diſtinguerons toutes les formes des quantités imaginaires qu'il paroît poſſible de concevoir, 1°. Soit $a + b \sqrt{-1}$ une quantité imaginaire, a & b étant des quantités réelles. La quantité $(a + b \sqrt{-1})^m$, m étant une quantité réelle, pourra toujours ſe réduire à la forme dont on vient de parler. Faiſons $aa + bb = c^2$, & cherchons l'angle p, tel que ſon ſinus ſoit $= \frac{b}{c}$ & ſon co-ſinus $= \frac{a}{c}$, cet angle p ſera toujours réel, puiſque a & b ſont ſuppoſés des quantités réelles. Si l'on fait la demi-circonférence $= n$, les arcs dont les ſinus $\frac{b}{c}$ & les co-ſinus $\frac{a}{c}$ ſont les mêmes, ſeront p, $2n + p$, $4n + p$, $6n + p$, &c. auxquels on peut ajoûter ceux-ci, $-2n + p$, $-4n + p$, $-6n + p$, &c. Cela poſé, on

aura $a + b\sqrt{-1} = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\sqrt{-1}\right)$ $= c\,(\text{cof.}\,p + \text{fin.}\,p\sqrt{-1})$, $(a + b\sqrt{-1})^m =$ $c^m\,(\text{cof.}\,p + \text{fin.}\,p\sqrt{-1})^m = c^m\,(\text{cof.}\,mp +$ $\sqrt{(-1)}\,.\,\text{fin.}\,mp)$, par le lemme premier; donc en faisant $M = c^m\,\text{cof.}\,mp$, & $N = c^m\,\text{fin.}\,mp$, l'on aura $(a + b\sqrt{(-1)})^m = M + N\sqrt{-1}$.

2°. Si a est une quantité positive élevée à un exposant imaginaire $m + n\sqrt{(-1)}$, l'on pourra toujours réduire $a^{m+n\sqrt{(-1)}}$ à la formule du théorême. Soit $a^{m+n\sqrt{(-1)}} = x + y\sqrt{(-1)}$, l'on aura (en prenant les logarithmes) $(m + n\sqrt{-1}) \times$ $L.\,a = L.\,(x + y\sqrt{-1})$. Différenciant en regardant a, x & y comme variables, on aura $\frac{m\,da}{a}$ $+ \frac{n\,da}{a}\sqrt{-1} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{(-1)}} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx + yy}$ $+ \frac{(x\,dy - y\,dx)\sqrt{(-1)}}{xx + yy}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $x - y\sqrt{(-1)}$. Égalant séparément les quantités réelles aux quantités réelles & les imaginaires aux imaginaires (ce qu'on doit toujours faire, autrement l'on supposeroit qu'une quantité réelle peut être égale à une quantité imaginaire), l'on a $\frac{m\,da}{a} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx + yy}$ & $\frac{n\,da\sqrt{(-1)}}{a} = \frac{(x\,dy - y\,dx)\,.\sqrt{(-1)}}{xx + yy}$; donc en divisant par $\sqrt{(-1)}$, cette derniere équation devient $\frac{n\,da}{a} = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy}$; donc en intégrant l'on aura ces deux autres équations $m\,L.\,a$

$= L.\sqrt{(xx + yy)}$, & $n\,L.\,a = f$, f étant un arc dont la tangente est $= \frac{y}{x}$; car en faisant le rayon $= a$, la tangente $= z$, l'on auroit la différentielle de l'arc $= \frac{aadz}{aa + zz}$. Donc en faisant $a = 1$ & $z = \frac{y}{x}$, l'on aura la différentielle de l'arc $= \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$; donc $\frac{y}{x} =$ tang. $n\,.\,L.\,a$. C'est pourquoi en prenant dans un cercle AB (Fig. 2) dont le rayon est supposé $= 1$, l'arc $n\,L.\,a$ = A M, l'on aura C P $= x =$ cos. $n\,L.\,a$, & P M $= y =$ sin. $n\,L.\,a$; donc $a^{n + n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} =$ cos. $n\,L.\,a +$ sin. $n\,L.\,a\sqrt{-1} = M + N\sqrt{(-1)}$, en faisant cos. $n\,L.\,a = M$, & sin. $n\,L.\,a = N$. Il est visible que a étant une quantité positive, M & N sont des quantités réelles. Si on prend l'arc $n\,L.\,a$ dans un cercle dont le rayon $= \sqrt{(y^2 + x^2)} = a^m$, l'on aura $(a + b\sqrt{-1})^m = a^m \times$ cos. $n\,L.\,a + a^m$ sin. $n\,L.a\sqrt{-1}$; car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (29), dans ce cas l'on a $x = a^m$ cos. $n\,L.\,a$, & il est visible que cette quantité se réduit à la même forme $M + N\sqrt{(-1)}$.

3°. Si l'on a la quantité $(a + b\sqrt{(-1)})$ élevée à un exposant imaginaire $m + n\sqrt{-1}$; ce cas sera encore compris dans la formule $M + N\sqrt{-1}$: car soit $(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{(-1)}$, on aura, en prenant les logarithmes, $(m + n\sqrt{-1}).\,L.\,(a + b\sqrt{-1}) = L.\,(x + y.\sqrt{-1})$. Et en prenant les différen-

tielles, multipliant & divisant celle de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$, & celle de $a + b\sqrt{-1}$ par $a - b\sqrt{-1}$, il viendra $\frac{xdx + ydy}{xx + yy} + \frac{(xdy - ydx)\sqrt{(-1)}}{xx + yy} = \frac{m.(ada + bdb)}{aa + bb} + \frac{n(ada + bdb)\sqrt{-1}}{aa + bb} + \frac{m(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} - \frac{n(adb - bda)}{aa + bb}$. En égalant les quantités réelles aux quantités réelles, les imaginaires aux imaginaires, il vient $\frac{m(ada + bdb)}{aa + bb} - \frac{n(adb - bda)}{aa + bb} = \frac{xdx + ydy}{xx + yy}$, & $\frac{m(adb - bda)}{aa + bb} + \frac{n(ada + bdb)}{aa + bb} = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}$. Pour en prendre les intégrales, je fais $\sqrt{(aa + bb)} = c$, l'arc dont la tangente est $\frac{b}{a}$ étant supposé $= p$; ainsi sin. $p = \frac{b}{c}$, & cos. $p = \frac{a}{c}$; donc les intégrales seront m L. $c - np =$ L. $\sqrt{(xx + yy)}$, $mp + n$ L. $c =$ A. Tang. $\frac{y}{x}$ (A désigne l'arc de la tang. $\frac{y}{x}$). Mais m L. $c - np = m$ L. $c - np$ L. e, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; donc L. $\sqrt{(xx + yy)} = m$ L. $c - np$ L. e, ou $\sqrt{(xx + yy)} = c^m e^{-np}$. Ainsi prenant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, & l'angle p tel que cos. $p = \frac{a}{c}$, & sin. $p = \frac{b}{c}$, & faisant le rayon du

cercle $= \sqrt{(xx + yy)}$, on aura $x = c^m e^{-np} \cos. (mp + n L. c)$, & $y = c^m e^{-np} \times \sin. (mp + n L. c)$. Donc $x + y\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{(-1)}}$ eſt réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$. De plus ſi les expoſans étoient élevés eux-mêmes à des puiſſances dont les expoſans fuſſent imaginaires, ils ſeroient compris ſous la même forme. Car ſi q, r, t, ſont des imaginaires de la forme $M + N\sqrt{(-1)}$, la quantité $a^{q^{r^t}}$ ſera compriſe ſous la même forme, puiſque r^t eſt réductible à cette forme, & par conſéquent auſſi q^{r^t}.

4°. Il eſt évident que toutes les fractions formées par addition, ſouſtraction, multiplication ou diviſion de tant de formules imaginaires que ce ſoit de cette forme $M + N\sqrt{-1}$, ſeront compriſes dans la même forme; car qu'on imagine tant de formules imaginaires $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, &c. qu'on voudra, il eſt clair qu'en ajoûtant enſemble ces formules, l'expreſſion qui en réſultera ſera toujours compriſe ſous la même forme, en faiſant $a + a' + a''$ &c. $= M$ & $b + b' + b'$ &c. $= N$. Il eſt aiſé de voir que ſi on retranche quelques unes de ces formules le réſultat ſera encore réductible à la même forme.

Si on multiplie $a + b\sqrt{-1}$ par $a' + b'\sqrt{-1}$, le produit $aa' - bb' + (ab' + a'b)\sqrt{-1}$, ſera réductible à la même forme $M + N\sqrt{-1}$, laquelle étant encore multipliée par $a'' + b''\sqrt{(-1)}$ don-

nera aussi la même forme. Il ne s'agit plus que de la division : or il est visible que ce cas se réduit toujours à une fraction de cette forme $\frac{A + B\sqrt{(-1)}}{C + D\sqrt{(-1)}}$, dans laquelle le numérateur & le dénominateur peuvent être composés par addition, soustraction & multiplication d'autant de formules imaginaires qu'on voudra de la forme $M + N\sqrt{-1}$: or cette fraction peut toujours se réduire à une autre dont le dénominateur soit réel en multipliant tout par $C - D\sqrt{-1}$; car alors il vient $\frac{AC + BD + (BC - AD)\sqrt{(-1)}}{CC + BD}$, & en faisant $\frac{AC + BD}{CC + BD} = M$, $\frac{BC - AD}{CC + BD} = N$, on aura la forme $M + N\sqrt{(-1)}$.

5°. Il est encore évident que toutes les puissances d'une formule $A + B\sqrt{-1}$, dont l'exposant m est un nombre entier positif, seront comprises dans la forme du théorême. Car $(A + B\sqrt{-1})^m$ n'est autre chose que le produit de $A + B\sqrt{-1}$ multiplié par lui-même un nombre de fois désigné par $m - 1$. Ce sera la même chose si m est un nombre entier négatif ; car alors on a $\frac{1}{(A + B\sqrt{-1})^m}$, qui se réduit à la forme $\frac{1}{M + N\sqrt{-1}}$. Celle-ci se réduit en multipliant haut & bas par $M - N\sqrt{-1}$, à cette autre $\frac{M - N\sqrt{-1}}{MM + NN}$, qui est évidemment réductible à la forme du théorême.

6°. La

6°. La formule générale $M + N\sqrt{-1}$ comprend encore le cas de $N = 0$, & par conséquent toutes les quantités réelles. Il peut arriver que le produit des formules imaginaires soit réel, alors $N = 0$: ainsi le produit de $a + b\sqrt{-1}$ par $a - b\sqrt{-1}$ est $= aa + bb$.

7°. Une racine m quelconque d'une quantité imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$, sera toujours de la même forme, c'est-à dire $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ sera toujours contenue dant la formule du théorême. Soit $\sqrt{(aa + bb)} = c$; p un angle dont le sinus $= \frac{a}{c}$ & le co-sinus $= \frac{b}{c}$, on aura $a + b\sqrt{-1} = c.(\text{cof.}\, p + \sqrt{(-1)}.\,\text{fin.}\, p)$. Mais, selon le lemme ci-dessus (32), l'on a $(\text{cof.}\, p + \text{fin.}\, p\sqrt{-1})^m = \text{cof.}\, mp + \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\, mp$, quelque nombre que soit m, même fractionnaire ; donc $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(a + b\sqrt{-1})}$ $= c^{\frac{1}{m}}(\text{cof.}\, \frac{1}{m}p + \sqrt{-1}.\,\text{fin.}\, \frac{1}{m}p)$. Mais c étant une quantité réelle aussi bien que a & b, $\frac{1}{m}p$ sera une quantité réelle ; donc $\sqrt[m]{(a + b\sqrt{-1})}$ appartient à la forme $M + N\sqrt{-1}$. Et *en général toute expression imaginaire est réductible à la forme* $M + N\sqrt{-1}$.

La racine quarrée de $a + \sqrt{-b}$, b étant positif peut s'exprimer généralement par $\pm\left[\sqrt{\left(\frac{a + \sqrt{(aa + b)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt{(aa + b)}}{2}\right)}\right]$; car en élevant cette quantité au quarré, on trouve $a + \sqrt{-b}$.

La quantité $\sqrt[10]{-b} = \sqrt{(\sqrt[5]{-b})} = \sqrt{(-\sqrt[5]{b})}$, se réduit facilement à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & il en est de même pour toutes les quantités imaginaires quelconques *.

35. THÉOREME. *La quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$, dans laquelle a & b sont réels, peut toujours se réduire à la forme cos. V $\pm$ sin. V. $\sqrt{(-1)}$.* Soit pris l'arc V dans un cercle dont le rayon $r = \sqrt{(aa + bb)}$, & prenant l'arc u semblable dans un cercle dont le rayon $= 1$, on aura cos. V $= \frac{r}{1}$ cos. $u = r$ cos. u, & sin. V $= r$ sin. u; donc $a \pm b\sqrt{-1} = r$. cos. $u \pm r$ sin. $u\sqrt{-1}$. Mais si l'on fait cos. V $= a$, l'on aura sin. V $= \sqrt{(rr - (\text{cos. V})^2)} = \sqrt{(aa + bb - aa)} = b$; donc r cos. $u \pm r \times$ sin. $u\sqrt{-1}$ = cos. V $\pm$ sin. V $\sqrt{-1} = a \pm b\sqrt{-1}$.

REMARQUE I. Si l'on avoit $b\sqrt{-1}$, il est visible qu'on ne pourroit réduire cette quantité à la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'en supposant $M = 0$.

REMARQUE II. L'on a vu ci-dessus (33) que l'arc $u = \frac{1}{\sqrt{-1}}$. L. (cos. u + sin. $u\sqrt{-1}$); donc

* Le quarré de la quantité $a + a\sqrt{-1}$ est $= aa + 2aa\sqrt{-1} - aa = 2.\sqrt{-1}$, en supposant $a = 1$. Donc $(2.\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = 1 + 1\sqrt{-1}$, ce qui fait voir que la racine de la quantité $2.\sqrt{-1}$ peut contenir une quantité entièrement réelle, c'est-à-dire, qui n'est affectée d'aucun multiplicateur imaginaire.

en multipliant, de part & d'autre, par rn, l'on aura $rnu = \frac{rn}{\sqrt{-1}} L. (\text{cof.}\, u + \text{fin.}\, u . \sqrt{-1})$ $= L. (\text{cof.}\, u + \text{fin.}\, u \sqrt{-1})^{-rn\sqrt{-1}}$ (car $\frac{rn}{\sqrt{-1}} = \frac{rn.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} = \frac{rn.\sqrt{-1}}{-1}$ $= -rn\sqrt{-1}) = L. \frac{1}{(\text{cof.}u + \text{fin.}u\sqrt{-1})^{rn\sqrt{-1}}}$ $= L. (\text{cof.}\, u - \text{fin.}\, u \sqrt{-1})^{rn\sqrt{-1}}$; puisque $\frac{1}{\text{cof.}\, u + \text{fin.}\, u \sqrt{-1}} = \text{cof.}\, u -$ $\text{fin.}\, u \sqrt{-1}$. En effet, en ôtant la fraction, l'on trouve $\text{cof.}\, u^2 + \text{fin.}\, u^2 = 1$, quarré du rayon 1 ; donc $L. (\text{cof.}u \pm \text{fin.}\, u \sqrt{-1})^{\mp rn\sqrt{-1}}$ $= rnu = rnu\, L.\, e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; donc $(\text{cof.}\, u \pm \text{fin.}\, u \sqrt{-1})^{\mp rn\sqrt{-1}} = e^{rnu}$, quantité réelle. Si l'on fait $M + N\sqrt{-1} =$ $r\,\text{cof.}\, u \pm r\,\text{fin.}\, u\sqrt{-1}$, ou $\frac{M}{r} + \frac{N}{r}\sqrt{-1}$ $= \text{cof.}\, u \pm \text{fin.}\, u \sqrt{-1}$, & qu'on fasse $a =$ $\frac{M}{r}$, $b = \frac{N}{r}$, l'on aura $(a \pm b\sqrt{-1})^{\mp rn\sqrt{-1}} =$ e^{rnu}; donc quand on dit que $(a + b\sqrt{-1})^{m\sqrt{-1}}$ peut toujours se réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$. Quelque soit m, on doit entendre que m étant une quantité réelle $= \mp rn$, N sera $= 0$, dans la formule $M + N\sqrt{-1}$, ce qu'il est bon de remarquer.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES LOGARITHMIQUES.

36. L'on a vu dans la premiere ſection comment il falloit différencier les quantités logarithmiques & exponentielles, on a vu auſſi comment on pouvoit obtenir dans certains cas des intégrales logarithmiques & exponentielles. Nous allons maintenant reprendre la même matiere.

Toutes les fois que l'on peut décompoſer une formule différentielle fractionnaire en deux facteurs dont le dividende ſoit la différentielle du diviſeur, l'intégrale eſt égale au logarithmique du dénominateur en y ajoutant une conſtante. Ainſi $S. \frac{dx}{x} = L. x + C$. Quand nous n'ajouterons point de conſtante, le lecteur doit y ſuppléer. $S. \frac{dz}{a+z} = L. (z + a)$. Mais ſi la fraction dont on vient de parler contenoit un facteur conſtant qui n'appartînt pas à la différentielle du dénominateur, on mettroit à part ce facteur, & l'on multiplieroit enſuite l'intégrale par le même facteur. Ainſi $S. \frac{b . 2xdx}{aa+xx} = bS. \frac{2xdx}{aa+xx} = b L. (aa + xx)$; $S. \frac{dz}{b . (z+a)} = S. \frac{1}{b} . \frac{dz}{z+a} = \frac{1}{b} S. \frac{dz}{z+a} = \frac{1}{b} L. (z + a)$.

Si la différentielle appartenoit au logarithme d'une fraction, il ſeroit plus aiſé de s'y tromper;

par exemple, $S.\frac{x\,dy - y\,dx}{yx} = L.\frac{y}{x}$.

Soit la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, en supposant $x = y - a$, & $dx = dy$, elle devient $\frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$, dont l'intégrale est $L.(y + \sqrt{(y^2 - aa)}) + C$, comme il est facile de s'en assurer en différençiant cette quantité. L'on a aussi $S.\frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = L.(x + a + \sqrt{(2ax + xx)})$. La différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(xx - bx + c)}}$ devient (en faisant $x = y + \frac{b}{2}$) $= \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}}$, dont l'intégrale est $L.\overline{y + \sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}}$ $= L.(x - \frac{b}{2} + \sqrt{(xx - bx + c)})$. On a de même $S.\frac{dx}{\sqrt{(aa + xx)}} = L.(x + \sqrt{(aa + xx)})$;

$S.\frac{dx}{x(\sqrt{aa + xx})} = -\frac{1}{a}.L.\left(\frac{a}{x} + \sqrt{(\frac{aa}{xx} + 1)}\right)$;

$S.\frac{-dx}{a\sqrt{(xx + 1)}} = -\frac{1}{a}(L.x + \sqrt{(xx + 1)})$;

$S.\frac{dx}{x.(1 + L.x)} = L.(1 + L.x)$;

$$S. \left(\frac{dx}{x}.Lx.L.(L.x)\right) = \frac{(L.x)^2}{2}\left(L.(L.x) - \frac{1}{2}\right) ;$$

$$S. \frac{dx\,L.x}{(1-x)^2} = \frac{x\,L.x}{1-x} + L.(1-x).$$

A l'égard des quantités exponentielles, on verra (voyez la section premiere n°. 26), si l'on peut les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre ; divisant alors par le premier facteur, l'on aura l'intégrale cherchée. Ainsi la différentielle $x^{y^z}.y^z(\frac{dx}{x} + dz.L.x.L.y + \frac{zL\ x.dy}{y})$ est intégrable ; parce que $y^z(\frac{dx}{x} + dz.L.x.L.y + \frac{zL.x.dy}{y})$ est la différentielle du logarithme de x^{y^z}, ou de $y^z L.x$. & l'intégrale est x^{y^z}.

Selon ce qu'on a dit section précédente (18), $S. \frac{dx\,L.x}{x} = \frac{1}{2}(L.x)^2$, & $S. x^m (L.x)^m dx =$

$$\frac{1}{m+1} x^{m+1} (L.x)^m - \frac{m}{(m+1)^2} x^{m+1} (L.x)^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{(m+1)^3} x^{m+1} (L.x)^{m-2} \text{ \&c.}$$

37. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^n dx\,L.x$. à cause de $S. x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, l'on aura, par la formule $S. dyx = xy - S. xdy$;

$S. x^n dx L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \times L. x -$

$S. \frac{1}{n+1} x^n d L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$

$\frac{1}{n+1} S. x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$

$\frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1}$.

Soit proposé d'intégrer la formule $m(L.x)^{m-1}\frac{dx}{x}$, Je fais $L. x = y$, pour avoir $\frac{dx}{x} = dy$, & $(L. x)^{m-1} = y^{m-1}$; donc la formule proposée est $= m y^{m-1} dy$, dont l'intégrale $= y^m = (L. x)^m$. Soit $(L. x^m)^{n-1} \frac{dx}{x}$; je fais $x^m = y$. Donc $m x^{m-1} dx = dy$, $dx = \frac{dy}{m x^{m-1}}$. De plus l'on aura $L. x^m = L. y$; substituant ces valeurs, la formule proposée devient $\frac{1}{m} (L.y)^{n-1} \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale $= \frac{1}{m \cdot n} (L. y)^n = \frac{1}{m \cdot n} (L.x^m)^n$. L'on a aussi $S. -\frac{dy}{y} = -L.y = L.\left(\frac{1}{y}\right) = L. 1 - L. y = - L. y$, à cause de $L. 1 = 0$; ce qu'il est bon de remarquer.

38. PROBLÊME. *Intégrer la formule* $\frac{dx}{1-x} L.x$.

Soit $1 - x = u$, ou $x = 1 - u$, la formule

O 4

deviendra $-\frac{du}{u}$ L. $(1-u)$. La différentielle de L. $(1-u)$ est $= \frac{-du}{1-u} = -du.(1-u)^{-1} = -du - udu -$ &c. Donc L. $(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} -$ &c. Et S. $-\frac{du}{u}$. L. $u = C + u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{25}u^5 +$ &c. Si l'on veut que cette série soit égale à o, lorsque $x = 0$, ou lorsque $u = 1$, l'on aura $C + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ &c. $= 0$, ou $C = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ &c.

39. PROBLÈME. *Trouver l'intégrale de la formule* $\frac{dx}{(1-x)^2}$. L. x. Je fais $u = 1 - x$, & la formule devient $\frac{-du}{uu}$ L. $(1-u) = \frac{du}{u} + \frac{1}{2}du + \frac{1}{3}udu + \frac{1}{4}u^2du$ &c. dont l'intégrale $= C +$ L. $u + \frac{u}{1.2} + \frac{uu}{2.3} + \frac{u^3}{3.4} + \frac{u^4}{4.5}$ &c. Pour que cette série s'évanouisse lorsque $x = 0$, ou lorsque $u = 1$, l'on doit avoir $C = -$ L. $1 - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$ &c. $= -\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$ &c. Car L. $1 = 0$.

40. PROBLEME. *Supposant que* p *est une fonction de* x, *trouver l'intégrale de la formule* dp (L. x)^n. Si l'on ajoutoit à cette différentielle la formule pd (L.x)^n, on auroit p(L.x)^n = S.dp (L.x)^n + S.pd (L.x)^n; donc S. dp (L.x)^n = p (L.x)^n — S.pd(L.x)^n = p L.x^n —

$n\,S.\frac{p\,dx}{x}(L.x)^{n-1}$; donc si $S.p\frac{dx}{x}=q$, l'on aura de même $S.p\frac{dx}{x}(L.x)^{n-1}=q(L.x)^{n-1}-(n-1)\times S\,q\frac{dx}{x}.(L.x)^{n-2}$. En opérant de même, & supposant $S.\frac{q\,dx}{x}=R$; $S.\frac{R\,dx}{x}=t$, $S.\frac{t\,dx}{x}=u$ &c. l'on aura $S.\,dp\,(L.x)^n=p\,(L.x)^n-nq\,(L.x)^{n-1}+n.(n-1).R(L.x)^{n-2}-n.(n-1).n-2.t\,(L.x)^{n-3}$ &c. Si n est un nombre entier positif, l'intégrale ne contiendra qu'un nombre fini de termes.

EXEMPLE I. Soit la formule $x^m\,dx\,(L.x)^2$, l'on aura $n=2$, $p=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, $q=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, & $R=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$; donc $S.x^m\,dx\,(L.x)^2=x^{m+1}\times\left(\frac{(L.x)^2}{m+1}-\frac{2\,L.x}{(m+1)^2}+\frac{2.1}{(m+1)^3}\right)$. Si $m=-1$, l'on aura $S.\frac{dx}{x}(L.x)^2=\frac{1}{3}(L.x)^3$; ce cas est excepté de la formule générale.

EXEMPLE II. Soit la formule $x^{m-1}\,dx\,(L.x)^3$; l'on a $n=3$, $p=\frac{x^m}{m}$; $q=\frac{x^m}{m^2}$; $R=\frac{x^m}{m^3}$, & $t=\frac{x^m}{m^4}$; donc $S.x^{m-1}\,dx\,(L.x)^3=x^m\left(\frac{(L.x)^3}{m}-\frac{3\,(L.x)^2}{m^2}+\frac{3.2\,L.x}{m^3}-\frac{3.2.1}{m^4}\right)$. Si m est un nombre entier positif >0, cette intégrale devient $=0$, lorsque $x=0$.

41. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la formule $a^x\,p\,dx$, p étant une fonction de x.* Puisque $d.a^x$ est $=a^x\,dx\,L.a$ par la nature des quantités exponentielles, on aura aussi $S.a^x\,dx=\frac{1}{L.a}a^x$; donc $S.p\,a^x\,dx=\frac{1}{L.a}\;a^x\;p-$

$\frac{1}{L.a} S. a^x dp$. Si l'on suppose $dp = q dx$ pour avoir $S. a^x q dx = \frac{1}{L.a} a^x q - \frac{1}{L.a} S. a^x dq$, l'on aura cette réduction $S. a^x p dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q + \frac{1}{(L.a)^2} S. a^x dq$; & si l'on fait $dq = R dx$, il viendra cette réduction $S. a^x p dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q + \frac{1}{(L.x)^4} a^x R - \frac{1}{(L.a)^3} S. a^x dR$, & ainsi de suite. L'on peut continuer jusqu'à ce que l'on parvienne à une formule intégrable, ou à une forme la plus simple de son espece.

EXEMPLE. Soit la formule $a^x x^n dx$, n étant un nombre entier positif ; puisque $x^n = p$, nous aurons $S. a^x x^n dx = \frac{1}{L.a} a^x x^n - \frac{n}{L.a} S. a^x x^{n-1} dx$. Si l'on fait successivement $x = 0, 1, 2, 3$, &c. l'on aura

$$S. a^x dx = \frac{1}{La} a^x$$

$$S. a^x x dx = \frac{1}{La} a^x x - \frac{1}{(La)^2} a^x$$

$$S. a^x x^2 dx = \frac{1}{La} a^x x^2 - \frac{2}{(La)^2} a^x x + \frac{2.1}{(La)^3} a^x.$$

$$S. a^x x^3 dx = \frac{1}{La} a^x x^3 - \frac{3}{(La)^2} a^x x^2 + \frac{3.2}{(La)^3} a^x x - \frac{3.2.1}{(La)^4} a^x.$$

$$\text{Et } S. a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{La} - \frac{n x^{n-1}}{(La)^2} + \frac{n.(n-1).x^{n-2}}{(La)^3} - \frac{n.(n-1).(n-2) x^{n-3}}{(La)^4} + \&c. \right)$$

Soit proposé de trouver l'intégrale de la formule $\frac{a^x dx}{x}$.

Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage (courbes algébriques 47), en appellant p le logarithme d'un nombre, ce nombre sera $= 1 + p + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3}$ &c. Donc puisque $L. a^x = x\ L. a$, l'on aura $a^x = 1 + x\ L. a + x^2 \frac{(L. a)^2}{1\ 2} +$ &c. Si l'on multiplie cette série par $\frac{dx}{x}$, & qu'on integre en ajoutant une constante, il viendra $S. \frac{a^x dx}{x} = C + L. x + \frac{x\ L. a}{1} + \frac{x^2 (L. a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (L. a)^3}{1.2.3.3}$ &c. Si au lieu de a, l'on prend le nombre e, dont le logarithme hyperbolique soit l'unité, il viendra $S. \frac{e^x dx}{x} = C + L. x + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3}$ &c. Si l'on fait $e^x = z$, ou $x\ L. e = x = L. z$, ce qui donne $dx = \frac{dz}{z}$, $\frac{e^x dx}{x} = \frac{z dz}{z L. z} = \frac{dz}{L. z}$, l'on aura $S. \frac{dz}{L. z} = C + L. L. z + \frac{L. z}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(L. z)^2}{1.2} +$ &c.

Pour que cette intégrale s'évanouisse lorsque $z = c$, la constante C doit être infinie, parce que le logarithme de o est infini (négatif) c'est la même chose si l'intégrale doit s'évanouir, lorsque $z = 1$, parce que le terme $L. L. z$ devient alors $= L. o$. Si z est plus petit que l'unité, $L. z$ devient négatif, & $L. L. z$ imaginaire ; & si l'intégrale est réelle, dans ce cas elle sera imaginaire pour les valeurs de z plus grandes que l'unité, & réciproquement.

Si l'on avoit à intégrer la formule $\frac{x^{m-1} dx}{L. x}$, en faisant $x^m = z$, on auroit $x^{m-1} dx = \frac{1}{m} dz$, $m\ L. x =$

L. z, ou L. $x = \frac{1}{m}$ L. z, & la formule se changeroit en celle-ci $\frac{dz}{L.z}$ dont on vient de parler. L'on peut aussi lorsque l'intégration ne réussit pas, réduire la formule $a^x p\,dx$ en série, & l'on aura S. $a^x p\,dx =$ S. $p\,dx + \frac{L.a}{1}$ S. $p\,x\,dx + \frac{(L.a)^2}{1.2}$. S. $p\,x^2\,dx$ &c.; ainsi si $p = x^n$, S $a^x p dx$ sera $= C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{(L.a)\,x^{n+2}}{1.(n+2)} + \frac{(L.a)^2 x^{n+3}}{1.2.(n+3)}$ &c. Or il faut remarquer que si $n = -1$, au lieu de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, l'on doit écrire L. x.

Soit la formule $\frac{a^x dx}{1-x}$; l'on aura $p = \frac{1}{1-x}$; $q = \frac{1}{(1-x)^2}$; $R = \frac{1.2}{(1-x)^3}$; $t = \frac{1.2.3}{(1-x)^4}$; &c. Donc S. $\frac{a^x dx}{1-x} = a^x \left(\frac{1}{(1-x)\,L.a} - \frac{1}{(1-x)^2 (L.a)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3 (L\,a)^3}\right.$ &c.$\left.\right)$

42. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la formule exponentielle* $x^{nx} d\,x$. Je réduis x^{nx} en série pour avoir $x^{nx} = 1 + nx\,L.x + \frac{n^2x^2(L.x)^2}{1.2} + \frac{n^3x^3(L.x)^3}{1.2.3}$ &c. Multipliant par $d\,x$ & intégrant chaque terme l'on a

S. $dx = x$.

S. $x\,dx\,L\,x = x^2\left(\frac{L\,x}{2} - \frac{1}{2^2}\right)$.

S. $x^2 dx\,(L\,x)^2 = x^3\left(\frac{(L\,x)^2}{3} - \frac{2\,(L\,x)}{3^2} + \frac{2.1}{3^3}\right)$.

S. $x^3 dx\,(Lx)^3 = x^4\left(\frac{(Lx)^3}{4} - \frac{3(Lx)^2}{4^2} + \frac{3.2.Lx}{4^3} - \frac{3.2.1}{4^4}\right)$.

&c. = &c.

Et en général si l'on substitue ces séries & qu'on les arrange par rapport aux puissances de Lx, l'intégrale sera exprimée par les séries qu'on voit ici.

$$Sx^{nx}dx = \begin{cases} +x\left(1-\frac{nx}{2^2}+\frac{n^2x^2}{3^3}-\frac{n^3x^3}{4^4}+\frac{n^4x^4}{5^5}\right. \quad \&c. \\ +\frac{nx^2}{1}Lx\left(\frac{1}{2^1}-\frac{nx}{3^2}+\frac{nnx^2}{4^3}-\frac{n^3x^3}{5^4}\right. \quad \&c. \\ +\frac{n^2x^3(Lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3^1}-\frac{nx}{4^2}+\frac{n^2x^2}{5^3}-\frac{n^3x^3}{6^5}\right. \quad \&c. \\ \&c. \end{cases}$$

Soit la formule $e^x(dp+pdx)$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$; il est évident que l'intégrale est $=e^xp$.

Il est difficile de donner des règles qui fassent trouver l'intégrale dans des cas semblables, & souvent il faut procéder par conjecture; comme par exemple, si l'on proposoit la formule $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$, on pourra soupçonner que l'intégrale de cette différentielle est de cette forme $\frac{e^x z}{1+x}$. Pour s'en assurer, on différenciera l'intégrale supposée, pour avoir $\frac{e^x\left(dz(1+x)+xzdx\right)}{(1+x)^2}$. Comparant avec la formule proposée, l'on trouve $dz(1+x)+xzdx=xdx$, où l'on voit tout de suite que $z=1$ & $dz=0$, ce que les règles ne feroient pas facilement connoître.

La différentielle $dx\sqrt{(xx+aa)}$ a pour intégrale la quantité $\frac{1}{2}x\sqrt{(xx+aa)}+\frac{1}{2}aaL\left(x+\sqrt{(xx+aa)}\right)+C$. Si l'on suppose $a=\frac{1}{2}p$, p étant le paramètre d'une parabole ordinaire dont l'ordonnée est y, l'élément de l'arc de cette courbe, sera $\frac{2dy}{p}\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)}$. Donc

cet arc sera $= \frac{y}{p} \sqrt{(yy + \frac{1}{4} pp)} + \frac{1}{4} p \,\text{L.} \left(y + \sqrt{(yy + \frac{1}{4} pp)}\right) + \text{C}$. Or il est visible que $\text{C} = -\frac{1}{4} p \text{L.} \frac{1}{2} p$.

DES FORMULES QUI RENFERMENT LA DIFFÉRENCE D'UN ARC CIRCULAIRE, OU DU LOGARITHME HYPERBOLIQUE SIMPLE, MULTIPLIÉE OU DIVISÉE PAR DES SINUS ET DES CO-SINUS.

43. Nous désignerons le logarithme hyperbolique simple par x au lieu de le désigner par m, comme nous l'avons fait dans les sections coniques (84); & alors, les deux formules qui regardent les sinus & les co-sinus multiples, en désignant le sinus hyperbolique par $s h$, & le co-sinus hyperbolique par $c.h$, deviendront

$$c.h.n.x = \frac{(c.h.x + s.h.x)^n + (c.h.x - s.h.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

$$s.h.n.x = \frac{(c.h.x + s.h.x)^n - (c.h.x - s.h.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

dans ces formules, r désigne le demi-axe de l'hyperbole équilatère, ou si l'on veut le sinus total.

Si dans les formules qu'on a trouvées (géom. 176) on substitue x au lieu de a, l'on aura pour le cercle dont le rayon $= r$, & x un arc quelconque

$$\text{Cof.} nx = \frac{(\text{cof.} x + \sqrt{-1} \text{ fin } x)^n + (\text{cof.} x - \sqrt{-1} \text{ fin.} x)^n}{2 r^{n-1}}$$

$$\text{Sin.} nx = \frac{(\text{cof.} x + \sqrt{-1} \text{ fin.} x)^n - (\text{cof.} x - \sqrt{-1} \text{ fin.} x)^n}{2 r^{n-1} \sqrt{-1}}$$

Ces quatre formules ont lieu, quelque soit le nombre n positif ou négatif, & même irrationnel. Nous désignons le sinus d'un arc circulaire x par sin. x, son co-sinus

par cos. x, tangente hyperbolique par $t.h$, co-tangente hyperbolique par cot. h.

REMARQUE. L'on sait que dans le cercle, le co-sinus est au sinus comme le rayon est à la tangente, & que la tangente est au rayon comme le rayon à la co-tangente; or c'est la même chose dans l'hyperbole équilatère (Fig. 8); car soit C P le co-sinus, P M le sinus, le demi-axe C B $=$ C A $= r$, la tangente A $f = t$, les triangles rectangles semblables C Af, C P M, donnent CP : P M :: CA : Af, ou $ch : sh :: r : t.h$. Les triangles semblables B F C, CfA (ces triangles ont les angles en F & C, alternes internes à cause des parallèles BF, CA) donnent Af : C A :: C B : B F; or B F est la co-tangente correspondante au sinus pM; donc $t.h : r :: r :$ cot. h. De ces proportions, on conclut que $s.h.x = \frac{c.h.x.t.h.x}{r}$; si l'on substitue cette valeur de $s.h.x$ dans les deux premières formules l'on a,

$$c.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n}\left(\frac{(r+t.h.x)^n+(r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}}\right)$$

$$s.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n}\times\left(\frac{(r+t.h.x)^n-(r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}}\right).$$

Mais $t.h = \frac{s.h.r}{c.h}$, donc $t.h.n.x = \frac{r.s.h.n.x}{c.h.n.x} = r.\left(\frac{(r+t.h.x)^n-(r-t.h.x)^n}{(r+t.h.x)^n+(r-t.h.x)^n}\right)$, & parce que $t.h.x : r :: r :$ cot. $h.x$, l'on a cot. $h.n.x = \frac{r^2}{t.h.n.x}$; donc l'on aura la formule suivante, cot. $h.n.x = r.\left(\frac{(r+t.h.x)+(r-t.h.x)}{(r+t.h.x)-(r-t.h.x)^n}\right)$. Par de semblables substitutions, l'on trouvera pour le cercle, tang. $nx =$

$$\frac{r}{\sqrt{(-1)}}.\left(\frac{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n-\left(r-\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n}{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n+\left(r-\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n}\right)$$

$$\text{cot}.nx = \frac{r.\sqrt{(-1)}.[(r+\sqrt{-1}.\text{tang}.x)^n+(r-\sqrt{-1}.\text{tang}.x)^n]}{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n-\left(r-\sqrt{(-1)}\text{tang}.x\right)^n}$$

44. PROBLEME. *Trouver l'intégrale des formules* $\frac{ch.x.d.s.hx - s.h.x\ d.ch.x}{r}$, $\frac{cof.x.d\,\text{fin}.x - \text{fin}.x d.\,cof.x}{r}$.

Dans la feconde x défigne un arc de cercle dont le rayon $= r$.

Je dis que S. $\frac{ch.x\ d.s.h.x - s.h.x.d.ch.x}{r} = x$, x défignant un logarithme hyperbolique fimple, & S. $\frac{cof.x\ d\ \text{fin}.x - \text{fin}.x\ d.\ cof.x}{r} = x$, x étant un arc de cercle dont le rayon $= r$. Dans l'hyperbole équilatere (Fig. 8.), le fecteur CAM divifé par $\frac{r}{2}$ donne le logarithmique hyperbolique fimple * correfpondant au finus PM (voyez la fection précédente 21); donc le logarithme x multiplié par $\frac{r}{2}$, ou $\frac{rx}{2}$ = CAM; or CAM eft égal au triangle CMP moins le demi-fegment APM, lequel demi-fegment en faifant CP = $c.h.x$, & PM = $s.h$, fera = S. $s.h.x.d.c.h.x$; donc $\frac{rx}{2} = \frac{c.h.x.\ s.h.x}{2} -$ S. $s.h.x.d.c.h.x$; donc en différenciant les deux membres de l'équation, réduifant & divifant par $\frac{r}{2}$ l'on a (A) $dx = \frac{c.h.x.d.s.h.x - s.h.x.d.c.h.x}{r}$; donc &c.

Dans le cercle (Fig. 2) en faifant CA $= r$, l'arc AM $= x$, le fecteur CAM $= \frac{rx}{2}$ = au triangle CPM + le demi-

* C'eft évidemment des logarithmes hyperboliques fimples dont il s'agit ici.

fegment

ſegment APM, ſera $= \frac{\text{coſ.}\, x\, \text{ſin.}\, x}{2} + S. - \text{ſin.}\, x\,.\, d.\, \text{coſ.}\, x.$
On met le ſigne $-$ parce que le ſecteur croiſſant, le coſinus décroît; de ſorte que ſa différentielle eſt négative.
Donc en différenciant, réduiſant & diviſant par $\frac{r}{2}$,
on a $dx = \frac{\text{coſ}\, x\,.\, d.\, \text{ſin.}\, x - \text{ſin.}\, x\,.\, d\, \text{coſ.}\, x}{r}$; donc &c.

45. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{dx\,.\,ch.\,x}{r}$; $\frac{dx\,.\,s.h.\,x}{r}$; $\frac{dx\, \text{coſ.}\, x}{r}$; $\frac{-dx\, \text{ſin.}\, x}{r}$.

L'on a $S. \frac{dx\,.\,ch.\,x}{r} = s\,h.\,x$; $S. \frac{dx.\,s\,h.\,x}{r} = c\,h.\,x$; $S. \frac{dx\,.\,\text{coſ.}\, x}{r} = \text{ſin.}\, x$; $S. \frac{-dx\,.\,\text{ſin.}\, x}{r} = \text{coſ.}\, x$. Car dans l'hyperbole $(ch.\,x)^2 = r^2 + (sh.\,x)^2$; donc en différenciant, $ch.\,x.d.\,ch\, x = s\,h\,x\,.\,d.\,s\,h.\,x$ ou $d.c.\,hx = \frac{s\,hx.\,d\,\text{ſin.}\,h.\,x}{ch.\,x}$, & $d.\,s\,h.\,x = \frac{ch.\,x.\,d.\,ch.\,x}{sh.\,x}$. Ces valeurs étant ſucceſſivement ſubſtituées dans la formule A (44) donnent $r\,dx = ch.\,x.\,ds\,h.\,x - \frac{(sh.\,x)^2}{ch.\,x}.\,d\,s\,h.\,x$,
$r\,dx = \frac{(ch.\,x)^2}{sh.\,x}.\,d.\,c\,h.\,x - s\,h.\,x.\,d.\,ch.\,x$ ou
$r\,dx = \frac{d.\,s\,h.\,x}{ch.\,x}\left((ch.\,x)^2 - sh.\,x)^2\right)$, $r\,dx = \frac{d.\,ch.\,x}{s.h.\,x}\left((ch.\,x)^2 - (s\,ch.\,x)^2\right)$ ou $r\,dx = \frac{d.\,sh.\,x}{c\,h.\,x}\, r^2$;
$r\,dx = \frac{d.\,ch.\,x}{s\,h.\,x}.\,r^2$ (parce que $(ch.\,x)^2 - (s\,h.\,x)^2 = r^2$)
ou $d.\,s.\,h.\,x = \frac{dx\, ch.\,x}{r}$; $d.\,ch.\,x = \frac{dx\,.\,s\,h\,.\,x}{r}$; donc

$s\,h.x = S.\frac{dx.ch.x}{r}$; $ch.x = S.\frac{dx.sh.x}{r}$. Dans le cercle (Fig. 2), l'on a CM : MP :: Mm : mn, CM : CP :: Mm : Mn, ou $r : \text{sin.}\,x :: dx : -d.\text{cos.}\,x$; $r : \text{cos.}\,x :: dx : d.\text{sin.}\,x$; donc $d.\text{cos.}\,x = \frac{-dx.\text{sin.}\,x}{r}$, & $S.\frac{-dx.\text{sin.}\,x}{r} = \text{cos.}\,x$; $d.\text{sin.}\,x = \frac{dx.\text{cos.}\,x}{r}$, & $S.\frac{dx.\text{cos.}\,x}{r} = \text{sin.}\,x$.

46. PROPOSITION. *L'on a toujours les quatre théorêmes suivans,*

$m.S.(ch.x)^m.dx = (m-1)r^2 S.(ch.x)^{m-2}dx + r(ch.x)^{m-1}sh.x.$

$m.S.(s.h.x)^m dx = -(m-1)r^2 S.(sh.x)^{m-2}dx + r(shx)^{m-1}ch.x.$

$m.S.(\text{cos.}\,x)^m dx = (m-1)r^2 S.(\text{cos.}\,x)^{m-2}dx + r.(\text{cos.}\,x)^{m-1}\text{sin.}\,x.$

$m.S.(\text{sin.}\,x)^m dx = (m-1)r^2 S.(\text{sin.}\,x)^{m-2}dx - r.(\text{sin.}\,x)^{m-1}\text{cos.}\,x.$

Pour démontrer le premier théorême, je remarque que $d.[(ch.x)^{m-1}sh.x] = (m-1).(ch.x)^{m-2}s.h.x \times d.ch.x + (ch.x)^{m-1}d.sh.x$. Substituant les valeurs de $d.ch.x$, $d.sh.x$ qu'on vient de trouver (45), & $(ch.x)^2 - r^2$ au lieu de $(sh.x)^2$, & multipliant tout par r, il vient $r\,d[(ch.x)^{m-1}sh.x)] = (m-1).(ch.x)^m.dx - (m-1)r^2(ch.x)^{m-2}dx + (c.h)^m dx$; donc $m.(c.h.x)^m dx = (m-1)r^2 \times (ch.x)^{m-2}dx + r\,d[(ch.x)^{m-1}sh.x)]$; donc en intégrant, $S.m(ch.x)^m dx = (m-1).r^2 S.(ch.x)^{m-2}dx + r.(ch.x)^{m-1}s.h.x.$

Le second théorême se démontre par la formule $d.[(s.h.x)^{m-1}ch.x]=(m-1).s.(h.x)^{m-1}ch.x.d.sh.x + (sh.x)^{m-1}d.ch.x$. En faisant les mêmes substitutions que nous venons de faire, excepté que nous substituerons la valeur de $(ch.x)^2=r^2+(sh.x)^2$ au lieu de celle de $(sh.x)^2$, nous parviendrons à la formule $rd.[(sh.x)^{m-1}ch.x]=(m-1).r^2(sh.x)^{m-2}dx + (m-1).(sh.x)^m dx+(sh.x)^m dx$; donc en réduisant, transposant & intégrant, $m.S.(sh.x)^m dx = -[(m-1).r^2 S.(sh.x)^{m-2}dx]+r(sh.x)^{m-1}ch.x$.

Pour démontrer le troisième théorême, je me sers de la formule $d.(\text{cos}.x)^{m-1}\text{sin}.x=(m-1).(\text{cos}.x)^{m-2}\times \text{sin}.x.d\,\text{cos}.x+(\text{cos}.x)^{m-1}d\,\text{sin}.x$. Substituez les valeurs de $d\,\text{cos}.x$, $d.\text{sin}.x$, trouvées ci-dessus (45), écrivez $r^2-(\text{cos}.x)^2$ au lieu de $(\text{sin}.x)^2$, & multipliant par r, il viendra $rd[(\text{cos}.x)^{m-1}\text{sin}.x]=-(m-1)r^2\times (\text{cos}.x)^{m-2}dx+(m-1).(\text{cos}.x)^m dx+(\text{cos}.x)^m dx$; donc $m.S(\text{cos}.x)^m dx=(m-1)r^2.S.(\text{cos}.x)^{m-2}dx + r(\text{cos}.x)^{m-1}\text{sin}.x$.

Le quatrième théorême se démontre facilement par la formule $d[(\text{sin}.x)^{m-1}\text{cos}.x]=(m-1).(\text{sin}.x)^{m-2}\times \text{cos}.x.d.\text{sin}.x+(\text{sin}.x)^{m-1}d.\text{cos}.x$. Si l'on substitue les valeurs de $d.\text{cos}.x$, $d.\text{sin}.x$, & celle de $(\text{cos}.x)^2 = r^2-(\text{sin}.x)^2$, & qu'on s'y prenne comme dans le cas précédent, l'on trouvera $m.S.(\text{sin}.x)^m dx=(m-1)r^2\times S.(\text{sin}.x)^{m-2}dx-r.(\text{sin}.x)^{m-1}\text{cos}.x$.

47. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{rdx}{(ch.x)^2}$, $-\frac{rdx}{(sh.x)^2}$, $\frac{rdx}{(\text{cos}.x)^2}$, $-\frac{rdx}{(\text{sin}.x)^2}$. L'on a $S.\frac{r.dx}{(ch.x)^2}=\frac{sh.x}{ch.x}$. Cela suit du premier théorême; car en supposant $m=0$, il en résulte l'équation $0=$

$-1 . r^2 S. (ch.x)^{-2} dx + r.(ch.x)^{-1} sh.x$; donc $r S. \frac{dx}{(ch.x)^2} = \frac{sh.x}{ch.x}$. Par le second théorême, l'on a dans ce cas, $-rS. \frac{dx}{(sh.x)^2} = \frac{ch.x}{sh.x}$. Le troisième donne $r S. \frac{dx}{(\text{cos}. x)^2} = \frac{\text{sin}. x}{\text{cos}. x}$, & le quatrième fait voir que $-r S. \frac{dx}{(\text{sin}. x)^2} = \frac{\text{cos}. x}{\text{sin}. x}$.

48. PROBLEME. *Intégrer les formules* $ch.x.dx$; $s.hx.dx$; $\text{cos}. x . dx$; $\text{sin}. x dx$. Si dans les quatre théorêmes ci-dessus, l'on fait $m = 1$, ou $m - 1 = 0$, l'on aura $S. ch.x dx = r sh.x$; $S. sh.dx = r.ch.x$; $S. \text{cos}.x dx = r \text{sin}. x$; $S. \text{sin}. x . dx = -r \text{cos}. x$.

On voit aussi facilement qu'en faisant $m = 2$ dans les mêmes théorêmes ci-dessus, ou $m - 2 = 0$; à cause de $S. (ch.x)^{m-2} dx = S. dx = x$, le premier théorême donnera $2 S. (ch.x)^2 dx = r^2 x + r ch.x . sh.x$. Il est aisé de voir que le second théorême donne $2 S. (sh.x)^2 dx = -r^2 x + r sh.x . ch.x$. Par le troisième théorême l'on a $2 S. (\text{cos}. x)^2 dx = r^2 x + r \text{cos}. x . \text{sin}. x$. Et par le quatrième, l'on trouve $2 S. (\text{sin}. x)^2 dx = r^2 x - r . \text{sin}. x . \text{cos}. x$.

49. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{dx}{ch.x}$; $\frac{dx}{sh.x}$; $\frac{dx}{\text{sin}. x}$; $\frac{dx}{\text{cos}. x}$. Nous avons trouvé ci-dessus (45) l'équation $r dx = \frac{d.sh.x}{ch.x} r^2$, d'où l'on tire $dx = \frac{r d.sh.x}{ch.x}$. Substituant cette valeur de dx dans la premiere formule & multipliant par r, l'on trouve $\frac{rr.d.sh.x}{(ch.x)^2} = \frac{r^2.d.sh.x}{r^2 + (sh.x)^2}$. L'intégrale de cette formule est égale à un arc de cercle AM (Fig. 2), dont la tangente $Ab = sh.x$. Cela suit de ce que par la

section précédente (31), $\frac{aadx}{aa+xx}$ est l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $=a$, & la tangente x; donc si le rayon $=r$ & la tangente $=sh.x$, l'élément de l'arc sera $=\frac{rrd.sh.x}{r^2+(sh.x)^2}$; & partant $S.\frac{dx}{ch.x}$ $=\frac{AM}{r}$.

Nous avons encore trouvé (45), $rdx=\frac{d.ch.x}{sh.x}r^2$; donc $dx=\frac{r.dch.x}{sh.x}$; donc $\frac{rdx}{shx}=\frac{r^2.dch.x}{(sh.x)^2}=\frac{rrd.ch.x}{(ch.x)^2-r^2}$.

Si dans une hyperbole équilatère dont le demi-axe CA $=r$, l'on prend la co-tangente BD (Fig 9) $=ch.x=$CP (Fig. 8), & que par les points C & D, on tire la ligne CM, le secteur CAM divisé par $\frac{r}{2}$ ou le logarithme hyperbolique simple, sera $=S.\frac{-r^2d.ch.x}{(ch.x)^2-r^2}$. Cela suit de ce que l'on a vu dans la section précédente (21), que lorsque le demi-axe de l'hyperbole équilatère est $=a$, & la co-tangente $=z$, l'élément du logarithme hyperbolique simple est $=\frac{-a^2dz}{zz-aa}$; donc l'intégrale cherchée (n'ayant pas égard au signe) est égale au secteur CAM divisé $\frac{r}{2}$ & par r, ou est $=\frac{2.CAM}{rr}$. Il est aisé de voir que l'hyperbole AM (Fig. 9), dont on se sert pour intégrer est la même que l'hyperbole AM (Fig. 8), dans laquelle on prend $ch.x$.

Pour intégrer la troisième formule, je remarque que nous avons trouvé ci-dessus (45), la proportion $r:\text{sin.}x::dx:-d\,\text{cos.}x$; donc $dx=-\frac{r.d.\text{cos.}x}{\text{sin.}x}=\frac{-1.d.\text{cos.}x}{\text{sin.}x}$, en faisant $r=1$, & alors $\frac{dx}{\text{sin.}x}=$

$\frac{-d\cdot \text{cos}\,x}{(\text{sin}.\,x)^2}$. En faisant le rayon $=r$, on a $\frac{r\,d\,x}{\text{sin}.\,x} = \frac{-r^2\,d.\text{cos}.\,x}{(\text{sin}.x)^2} = \frac{-\frac{1}{2}r\,d.\text{cos}.\,x}{r-\text{cos}.\,x} - \frac{-\frac{1}{2}r\,d.\text{cos}.x}{r+\text{cos}.\,x}$, & en faisant $r=1$, S. $\frac{1\,d\,x}{\text{sin}.x} = \frac{1}{2}$ L. $\frac{1-\text{cos}.x}{1+\text{cos}.x} = \frac{1}{2}$ L.(tangente)$^2\,\frac{1}{2}\,x$ $=$ L. tangente $\frac{1}{2}\,x$. En effet, en supposant $r=1$, l'on verra aisément que $\frac{1-\text{cos}\,x}{1+\text{cos}.\,x} = (\text{tangente})^2.\,\frac{1}{2}\,x$, comme il suit de la formule $\frac{1-\text{cos}.\,m}{1+\text{cos}.\,m} = (\text{tang}.)^2\,\frac{1}{2}\,m$, qu'on a donnée dans la premiere partie de cet ouvrage (Géomét. 170) ; or la différentielle logarithmique de $\frac{1-\text{cos}.\,x}{1+\text{cos}.\,x}$ se trouve en divisant la différentielle de cette quantité par la quantité elle-même, ce qui donne $\frac{-2\,d.\text{cos}.\,x}{1-(\text{cos}.\,x)^2}$; ainsi $-\frac{d.\text{cos}.\,x}{1-(\text{cos}.\,x)^2}$ n'est que la moitié de cette différentielle.

Il est facile maintenant d'intégrer les formules $\frac{a.dx}{\text{sin}.x}$, $\frac{a\,dx+bdx}{\text{sin}.\,x}$, $\frac{a\,dx-bdx}{\text{sin}.\,x}$. Soit en supposant le rayon du cercle (dans lequel on prend l'arc x) $=1$ ou $=r$. Car il est visible que la grandeur du rayon ne peut faire de difficulté. En général dès qu'on sait trouver la différentielle logarithmique de $r\,r.\,\left(\frac{r-\text{sin}.\,x}{r+\text{cos}.\,x}\right)$, on peut facilement avoir l'intégrale de $\frac{B\,d\,x}{\text{sin}.\,x}$, B étant une quantité constante, & le rayon de l'arc x étant supposé $=r$.

n étant l'arc de 90 degrés & r le rayon du cercle, on a (voyez la Géométrie N° 139), l'équation $(\text{tang.})^2 \left(\frac{n+x}{2}\right) = rr. \left(\frac{r+\text{fin. } x}{r-\text{fin. } x}\right)$. Donc en faifant $r=1$, l'on trouvera L. tang. $\left(\frac{n+x}{2}\right) = \text{L. } (1 . 1) + \text{L. } (1+\text{fin. } x) - \text{L. } (1-\text{fin. } x)$. Mais en fuppofant toujours $r=1$, l'on a $dx = \frac{d.\text{fin.} x}{\text{cof. } x}$, & $\frac{dx}{\text{cof. } x} = \frac{d.\text{fin. } x}{(\text{cof. } x)^2} = \frac{d\,\text{fin. } x}{1.1-(\text{fin. } x)^2} = \frac{\frac{1}{2}\, d.\text{fin. } x}{1+\text{fin. } x} + \frac{\frac{1}{2}\, d.\text{fin. } x}{1-\text{fin. } x} = \frac{1}{2}\, d . \text{L.} \left(\text{tang. } \frac{n+x}{2}\right)^2$; donc S. $\frac{dx}{\text{cof. } x} = \text{L. tang. } \left(\frac{n+x}{2}\right)$.

50. THEOREME. *Si m eft un nombre entier pofitif & impair, les formules S. $(ch.x)^m dx$; S. $(sh.x)^m dx$; S. $(\text{cof.} x)^m dx$; S $(\text{fin.} x)^m dx$ font exactement intégrables.* Car elles dépendent de l'intégration d'autres formules femblables dans lefquelles l'expofant eft $m-2$, celles-ci dépendent d'autres formules femblables dans lefquelles l'expofant eft $m-4$, & ainfi de fuite jufqu'à ce qu'on arrive à des formules qui ont l'unité pour expofant, lefquelles (48) font exactement intégrables; & comme les féries pour les quatre formules fuivent la même loi, il fuffira de faire voir comment on peut avoir la férie qui donne S. $(\text{cof. } x)^m dx$. nous autons S. $(\text{cof. } x)^m dx . = \frac{r}{m} . (\text{cof. } x)^{m-1} \text{fin. } x + \frac{(m-1)}{m} r^2$ S. $(\text{cof. } x)^{m-2} dx$. Par la même raifon S. $(\text{cof. } x)^{m-2} dx = \frac{r}{m-2} (\text{cof. } x)^{m-3} \text{fin. } x +$

$\frac{m-3}{m-2}.r^2.$ S. $(\text{cos}.x)^{m-4}dx$; S. $(\text{cos}.x)^{m-4}dx = \frac{r}{m-4}(\text{cos}.x)^{m-5}.\text{sin}.x + \frac{m-5}{m-4}.r^2.$S.$(\text{cos}.x)^{m-6}dx$, & ainsi de suite. Donc S.$(\text{cos}.x)^m dx = \frac{r}{m}.(\text{cos}.x)^{m-1}\text{sin}.x + \frac{m-1}{m.(m-2)}.r^3(\text{cos}.x)^{m-3}\text{sin}.x + \frac{(m-1).(m-3)}{m.(m-2).(m-4)}.r^5 \times (\text{cos}.x)^{m-5}\ \text{sin}.x + \frac{(m-1).(m-3).(m-5)}{m.(m-2).(m-4).(m-6)}.r^6 \times$ S. $(\text{cos}.x)^{m-6}dx$; & en procédant de même, vous aurez une série dont tous les termes seront multipliés par sin. x, les exposans de cos. x, suivent la série $m-1$, $m-3$, $m-5$, & jusqu'à o, ce qui arrive au dernier terme. Les coefficiens des termes seront $\frac{1}{m}$, $\frac{m-1}{m.(m-2)}$, $\frac{(m-1).(m-3)}{m.(m-2).(m-4)}$, &c. multipliés respectivement par les termes de la série, r, r^3, r^5, &c. le dernier terme étant multiplié par r^m. Si m est un nombre pair positif, l'on parviendra à un terme qui contiendra la seule variable dx qui dans les deux premieres formules s'integre par le moyen de l'hyperbole, & dans les deux autres par un arc de cercle ; car x est égal dans les premieres, à un secteur hyperbolique divisé $\frac{r}{2}$, & dans les dernieres à un secteur circulaire divisé par $\frac{r}{2}$, ou ce qui revient au même, est égal à un arc de cercle dont le rayon $= r$.

51. Pour traiter plus facilement les cas dans lesquels m est un nombre négatif, il est à propos de changer un peu les formules ; & comme la même méthode a lieu pour toutes, il suffira de l'appliquer à la premiere. Je change le signe de m pour la rendre de négative positive, & il vient $-m$. S. $\frac{dx}{(ch.x)^m} = -(m+1).r^2$ S. $\frac{dx}{(ch.x)^{m+2}}$ +

$\frac{r.sh.x}{(ch.x)^{m+1}}$; donc en transposant, $(m+1)r^2 S. \frac{dx}{(ch.x)^{m+2}} =$ $m. S. \frac{dx}{(ch.x)^m} + \frac{rsh.x}{(ch.x)^{m+1}}$. Supposant $m+2=n$, ou $n-1=m+1$, l'on aura $(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(ch.x)^n} =$ $(n-2) S. \frac{dx}{(ch.x)^{n-2}} + \frac{rshx}{(ch.x)^{n-1}}$. En opérant de même sur les autres formules, on aura $(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(sh.x)^n} =$ $-(n-2)$ S. $\frac{dx}{(sh.x)^{n-2}} - \frac{rch.x}{(sh.x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(cos.x)^n} = (n-2) S. \frac{dx}{(cos.x)^{n-2}} + \frac{r\,sin.x}{(cos.x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2 S. \frac{dx}{(sin.x)^n} = (n-2) S. \frac{dx}{(sin.x)^{n-2}} - \frac{r\,cos.x}{(sin.x)^{n-1}}$.

COROLLAIRE. Si n est pair, il est visible que les formules $S. \frac{dx}{(ch.x)^n}$, $S. \frac{dx}{(sh.x)^n}$, $S. \frac{dx}{(cos.x)^n}$, $S. \frac{dx}{(sin.x)^n}$, sont exactement intégrables; car il suit de ce qu'on vient de dire que ces formules dépendent d'autres formules semblables dans lesquelles l'exposant est $n-2$, & celles-ci dépendent d'autres formules dans lesquelles l'exposant est $n-4$ & ainsi de suite. jusques à ce que l'exposant soit 2; or l'on a vu ci-dessus que ces dernieres sont exactement intégrables. Si n est impair, on prouvera par un raisonnement semblable, que l'intégration des formules dont on vient de parler, dépend de l'intégation de celles-ci $\frac{dx}{ch.x}$, $\frac{dx}{sh.x}$, $\frac{dx}{cos.x}$, $\frac{dx}{sin.x}$, dont la premiere dépend de la rectification du cercle, la seconde de la quadrature de l'hyperbole, & les deux autres s'integrent par les logarithmes.

52. Afin de faire comprendre comment on peut intégrer les formules qui renferment à la fois des sinus & des co-sinus, nous allons établir les quatre théorêmes suivans.

$$(m+n)\,S.(s.h.x)^{n-1}(ch.x)^{m+1}dx = r(sh.x)^n(ch.x)^m + mr^2\,S.(sh.x)^{n-1}(ch.x)^{m-1}dx.$$

$$(m+n)\,S.(ch.x)^{m-1}(sh.x)^{n+1}dx = r(ch.x)^m(sh.x)^n - nr^2\,S.(ch.x)^{m-1}(sh.x)^{n-1}dx.$$

$$(m+n)\,S.(\text{fin}.x)^{n-1}(\text{cof}.x)^{m+1}dx = r(\text{fin}.x)^n(\text{cof}.x)^m + mr^2\,S.(\text{fin}.x)^{n-1}(\text{cof}.x)^{m-1}dx.$$

$$(m+n)\,S.(\text{cof}.x)^{m-1}(\text{fin}.x)^{n+1}dx = -r(\text{cof}.x)^m(\text{fin}.x)^n + nr^2\,S.(\text{cof}.x)^{m-1}(\text{fin}.x)^{n-1}dx.$$

Pour démontrer les deux premiers théorêmes, je remarque que la différentielle de $\left((ch.x)^m(sh.x)^n\right)$ est $= m.(sh.x)^n(ch.x)^{m-1}d.ch.x + n(ch.x)^m(sh.x)^{n-1}d.sh.x.$ Or $d.ch.x = \frac{dx.sh.x}{r}$, $d.sh.x = \frac{dx.ch.x}{r}$; donc en substituant, l'on aura la formule $rd\left((ch.x)^m(sh.x)^n\right) = m.(sh.x)^{n+1}(ch.x)^{m-1}dx + n(ch.x)^{m+1}(sh.x)^{n-1}dx.$

Si dans cette formule on substitue la valeur de $(sh.x)^{n+1} = (sh.x)^{n-1}.\left((ch.x)^2 - r^2\right)$, l'on aura en transposant, le premier théorême ; & si au lieu de $(ch.x)^{m+1}$, l'on substitue $(ch.x)^{m-1} \times \left(r^2 + (sh.x)^2\right)$, l'on aura le second théorême.

L'on a aussi $d.\left((\text{cof}.x)^m.(\text{fin}.x)^n\right) = m.(\text{fin}.x)^n \times (\text{cof}.x)^{m-1}d.\text{cof}.x + n.(\text{cof}.x)^m.(\text{fin}.x)^{n-1}d.(\text{fin}.x).$

Mais $d.\text{cof}.x = \frac{-dx.\text{fin}.x}{r}$, $d.\text{fin}.x = \frac{dx.\text{cof}.x}{r}$; donc en substituant, il viendra $rd\left((\text{cof}.x)^m.(\text{fin}.x)^n\right) =$

$-m.(\text{sin}.x)^{n+1}.(\text{cos}.x)^{m-1}dx+n.(\text{cos}.x)^{m+1}\times(\text{sin}.x)^{n-1}dx.$

Si au lieu de $(\text{sin}.x)^{n+1}$ l'on écrit $(\text{sin}.x)^{n-1}\times\left(r^2-(\text{cos}.x)^2\right)$, & qu'on fasse les transpositions nécessaires, l'on trouvera le troisième théorême; & si l'on substitue $(\text{cos}.x)^{m-1}.\left(r^2-(\text{sin}.x)^2\right)$, au lieu de $(\text{cos}.x)^{m+1}$, l'on aura (en transposant) le dernier théorême.

Si n étant un nombre entier positif ou négatif, m est un nombre entier positif, on doit se servir du premier théorême pour les quantités hyperboliques, & du troisième pour les quantités circulaires. Car si m est impair & $m+1$ pair, l'intégration de la formule $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m+1}dx$ dépend de l'intégrale S. $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m-1}dx$, & celle-ci dépend de S. $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m-3}dx$, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'exposant de $ch.x$ soit $=0$; ainsi l'intégrale de la formule proposée dépend de celle de $(sh.x)^{n-1}dx=(shx)^m dx$, en faisant $n-1=m$. Mais on peut intégrer cette formule par ce qu'on a dit ci-dessus.

Si m est pair, on parviendra à une formule qui contiendra $ch.x$ ou cos. x avec l'exposant 1; donc alors l'intégrale de la formule proposée dépend de S. $(sh.x)^{n-1}ch.x.dx=r.$ S. $(sh.x)^{n-1}d.sh.x$, à cause de $ch.x.dx=rd.sh.x$, comme il suit, de ce qu'on a dit ci-dessus (48). Or $r.$ S. $(sh.x)^{n-1}d.sh.x=\frac{r}{n}(sh.x.)^n$, excepté le cas de $n=0$; car alors l'intégrale est r L. $sh.x$. Il est aisé de voir comment on doit s'y prendre pour les quantités circulaires.

Si m étant un nombre entier positif ou négatif, n est un nombre entier positif, on se servira du second théorême pour les quantités hyperboliques, & du quatrième pour les quantités circulaires. Car par ces théorêmes, l'on démontrera que n étant impair & $n+1$ pair, la formule proposée dépendra de S. $(ch.x)^{m-1}dx$ ou S. $(\text{cos}.x)^{m-1}dx$, qu'on peut obtenir par ce que l'on a

dit ci-dessus. Si n est pair, on réduira la proposée à $S.(ch.x)^{m-1}\ sh.x.dx$ pour les quantités hyperboliques, & à $S.(\text{cos}.x)^{m-1}\ \text{sin}.x.dx$ pour les circulaires; mais $sh.x.dx = r.dch.x$, & $\text{sin}.x\,dx = -r.d\,\text{cos}.x$, donc on réduira la proposée à une des formules $r.(ch.x)^{m-1} \times d.ch.x$, $-r.(\text{cos}.x)^{m-1}\ d.\text{cos}.x$ dont les intégrales sont $\frac{r}{m}.(ch.x)^m$, $\frac{-r}{m}(\text{cos}.x)^m$, excepté le cas de $m=0$: car alors l'on a les intégrales $r.\ L.\ ch.x$, $-r.\ L.\ \text{cos}.x$.

53. Pour intégrer les formules, en supposant que m & n sont tous les deux des nombres négatifs, il est à propos de changer un peu les théorêmes ci-dessus. Il suffira d'appliquer la méthode au premier, car elle est la même pour tous. En changeant les signes de m & de n, on aura—

$$((m+n))\ S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}\ (ch.x)^{m-1}} = \frac{r}{(sh.x)^n\ (ch.x)^m} -$$

$$m.r^2.S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}\ (ch.x)^{m+1}}.\ \text{Donc } m.r^2 \times$$

$$S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}.(ch.x)^{m+1}} = \frac{r}{(sh.x)^n.(ch.x)^m}$$

$$+ (m+n).S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}.(ch.x)^{m-1}}.$$

En suivant la même méthode les autres théorêmes deviendront:

$$n.r^2 S.\frac{dx}{(ch.x)^{m+1}.(sh.x)^{n+1}} = \frac{-r}{(ch.x)^m.(sh.x)^n} -$$

$$(m+n).S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}(ch.x)^{m-1}}.$$

$$m.r^2.S.\frac{dx}{(\text{sin}.x)^{n+1}\ (\text{cos}.x)^{m+1}} = \frac{r}{(\text{sin}.x)^n\ (\text{cos}.x)^m} +$$

$$(m+n).S.\frac{dx}{(\text{sin}.x)^{n+1}(\text{cos}.x)^{m-1}}.$$

$$n.r^2.S.\frac{dx}{(\text{cof.}\,x)^{m+1}.(\text{fin.}\,x)^{n+1}} = \frac{-r}{(\text{cof.}\,x)^{m}.(\text{fin}\,x)^{n}} + (m+n).\,S.\frac{dx}{(\text{cof}\,x)^{m+1}.(\text{fin.}\,x)^{n-1}}.$$

L'on doit se servir de ces quatre théorêmes, de même que des quatre précédens: car m étant un nombre entier & positif, l'on doit employer le premier & le troisième théorême. Si m est impair, & $m+1$ pair, l'intégration de la formule dans laquelle l'exposant du co-sinus est $m+1$, dépend de celle de la formule dans laquelle l'exposant du co-sinus est $m-1$, celle-ci dépend de celle dans laquelle l'exposant est $m-3$, & ainsi de suite jusqu'à ce que cet exposant soit $=0$. Or l'intégration de cette derniere dépend de $S.\frac{dx}{(sh.x)^{m+1}}$, ou de $S.\frac{dx}{(\text{fin.}x)^{m+1}}$, qu'on peut intégrer, par ce qu'on a dit ci-dessus. Si m est pair & $m+1$ impair, il faut seulement pousser le calcul jusqu'à ce que l'exposant du co-sinus soit $=1$, si on le poussoit plus loin, de maniere que cet exposant devînt $=-1$, l'on auroit des coefficiens $=0$, qui, en passant aux diviseurs, rendroient les quantités infinies. On se servira de la même maniere du second & du quatrième théorême si n est un nombre entier positif. Car si n est impair & $n+1$ pair, l'on arrivera à une formule dans laquelle l'exposant du finus sera $=0$, & l'on aura une formule qui contiendra dx divisé par la puissance $m+1$ du co-sinus, formule qu'on sait maintenant intégrer. Si n est pair, l'on parviendra à une formule dans laquelle l'exposant du finus est $=1$; on ne doit pas aller plus loin, à cause des diviseurs $=0$.

54. On voit donc comment on peut procéder lorsque l'un des nombres m, n, est impair. Si l'un & l'autre étoit pair, dans ce cas, par le premier & le troisième théorême, on parviendra aux formules $\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}\,ch.x}$, $\frac{dx}{(\text{fin.}\,x)^{n+1}\,\text{cof.}\,x}$. On réduira ensuite (par le second & le quatrième théorême) l'intégration de ces formules à

l'intégration des formules $\frac{dx}{sh.x.\,ch.x}$, $\frac{dx}{\text{fin}.x.\,\text{cof}.x}$, Il eſt donc à propos de chercher l'intégrale de ces dernieres formules. Je cherche premierement l'intégrale de la formule $\frac{r^2 dx}{sh.x.\,ch.x}$. Je ſubſtitue au lieu de r^2, ſa valeur $(ch.x)^2 - (sh.x)^2$, ce qui donne $\frac{r^2 dx}{sh.x.\,ch.x} = \frac{dx.(ch.x)^2 - dx.(sh.x)^2}{sh.x.\,ch.x.} = \frac{dx.\,ch.x}{sh.x} - \frac{dx.\,sh.x}{ch.x}$. Mais $dx.\,ch.x = rd.sh.x$. & $dx.sh.x = rd.ch.x$; donc $S.\frac{r^2 dx}{ch.x.\,sh.x} = r.S.\frac{d.sh.x}{sh.x} - r.S.\frac{d.ch.x}{ch.x} = r\,L.sh.x - r\,L.ch.x$, & $S.\frac{dx}{sh.x.\,ch.x} = + \frac{rL.sh.x - rL.ch.x}{r^2} = \frac{1}{r}L.\frac{sh.x}{ch.x}$.

Venons à la formule $\frac{r^2 dx}{\text{fin}.x.\,\text{cof}.x} = \frac{dx.(\text{cof}.x)^2 + dx.(\text{fin}.x)^2}{\text{fin}.x.\,\text{cof}\,x}$ (à cauſe de $r^2 = (\text{cof}.x)^2 + (\text{fin}.x)^2$) $= \frac{dx.\,\text{cof}.x}{\text{fin}.x} + \frac{dx.\,\text{fin}.x}{\text{cof}.x}$. Mais $dx.\,\text{cof}.x = r.d\,\text{fin}.x$, & $dx.\,\text{fin}.x = - r.d\,\text{cof}.x$; donc $\frac{r^2 dx}{\text{fin}.x.\,\text{cof}.x} = \frac{r d.\,\text{fin}.x}{\text{fin}.x} - \frac{r d.\,\text{cof}.x}{\text{cof}.x}$; donc en intégrant & diviſant par r^2 l'on aura $S.\frac{dx}{\text{fin}.x.\,\text{cof}.x} = \frac{1}{r}L.\frac{\text{fin}.x}{\text{cof}.x}$.

DE L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

55. Soit la fraction $\frac{x^4 dx}{x^2 - 4}$. En divisant le numérateur par le dénominateur, autant que cela ce pourra, l'on réduit la fraction proposée à la différentielle, $x^2 dx + 4 dx + \frac{16 dx}{x^2 - 4}$, dont l'intégrale $= \frac{x^3}{3} + 4x + 4 \text{L.} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)$. L'on voit par-là qu'on peut toujours parvenir à une fraction dans laquelle l'exposant de la variable dans le dénominateur soit plus grand que dans le numérateur, & cela en divisant le numérateur par le dénominateur, autant qu'il est nécessaire. Ainsi nous supposérons dans la suite que les fractions ont cette condition.

Si la variable avoit quelque exposant négatif, on pourroit le rendre positif en multipliant le numérateur & le dénominateur par l'inconnue élevée à un exposant positif, égal au plus grand exposant négatif. Ainsi dans la fraction $\frac{ax^{-3} dx + x dx}{bx^{-4} - x^2}$, on rendra tous les exposans négatifs en multipliant le numérateur & le dénominateur par x^4, & l'on aura $\frac{ax dx + x^5 dx}{b - x^6}$; l'on pourra donc supposer que tous les exposans de la variable sont positifs, puisqu'on peut facilement les rendre tels.

Si l'on avoit une fraction $\frac{ax^n dx}{(x^p + bx^q + g)^m}$, on la rendroit rationnelle, pourvu que m fût un nombre entier positif. Car si n est entier & positif, il suffit de chercher une série arithmétique qui comprenne tous les exposans du dénominateur, parmi lesquels on en suppose de fractionnaires. Si n étoit fractionnaire, la série devroit encore comprendre l'exposant n.

Soit la formule $\frac{x^2 dx}{x^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{1}{3}} + b}$, je réduis les exposans $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, & je vois facilement que la série $\frac{3}{6}.\ \frac{2}{6}.\ \frac{1}{6}.\ 0$, est la série cherchée. Je prends le terme $\frac{1}{6}$ le plus près de 0, & je fais $x^{\frac{1}{6}} = z$; donc $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$, $x^2 = z^{12}$; de sorte que la formule proposée devient $= \frac{6z^{17} dz}{z^3 + az^2 + b}$, qui est rationnelle. En général, si le terme de la série le plus approchant de 0 est $\frac{p}{q}$, on fera $x^{\frac{p}{q}} = z^p$ ou $x^p = z^{pq}$. Si l'on avoit la formule irrationnelle $\frac{x^2 dx}{x^2 + ax^{\frac{4}{3}} + b}$, on verroit aisément que la série arithmétique qui renferme tous les exposans du dénominateur, est $\frac{6}{3}.\ \frac{4}{3}.\ \frac{2}{3}.\ 0$; c'est pourquoi en faisant $x^{\frac{2}{3}} = z_2$ (on fait $x^{\frac{2}{3}} = z^2$ & non pas $= z$, parce que $\frac{2}{3} = \frac{p}{q}$ fait voir que $p = 2$), l'on

l'on aura $x = z^3$, $x^2 = z^6$, $x^{\frac{4}{3}} = z^4$, & $dx = 3z^2 dz$; donc la formule proposée deviendra $\frac{3z^8 dz}{z^6 + az^4 + b}$, fraction rationnelle.

Soit la fraction $\frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{(x^{\frac{1}{3}} + a x^{\frac{1}{5}} + b)^m}$, la série qui comprend tous les exposans du numérateur & du dénominateur est $\frac{15}{30}$. $\frac{14}{30}$. $\frac{13}{30}$... $\frac{1}{30}$. 0. Je fais $x^{\frac{1}{30}} = z$, ou $x = z^{30}$, $dx = 30 z^{29} dz$, &c. & la formule proposée devient $\frac{30 z^{14} dz}{(z^{10} + az^6 + b)^m}$, fraction rationnelle.

On peut voir par-là qu'il est facile de rendre rationnelles les fractions qui sont dans le cas de celles dont vient de parler.

On voit aussi que l'intégrale de la formule $\frac{a\,dz}{b+z}$ ou $\frac{dz}{b+z}$ (car la constante a ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration) dépend des logarithmes; de sorte que S. $\frac{dz}{b+z} =$ L. $(b+z)$ & S. $\frac{a\,dz}{b+z} = a$ L. $(b+z)$. L'on à aussi S. $\pm \frac{dx}{x \pm b} = \pm$ L. $(x \pm b)$. Mais si x étoit $< b$, parce que ainsi qu'on l'a remarqué à la fin de la premiere partie de cet ouvrage, le logarithme d'une quantité négative est imaginaire, du moins ainsi le prétendent de très-

grands Géomètres, & qu'on eût la formule $\pm \frac{dx}{x-b}$, on écriroit $\mp \frac{dx}{b-x}$, en changeant tous les signes, & l'on auroit S. $\pm \frac{dx}{x-b} =$ S. $\mp \frac{dx}{b-x} = \pm$ L. $(b-x)$. La formule $\frac{2zdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} + \frac{dz}{z-b}$, a pour intégrale L. $(b+z)$ + L. $(z-b)$. La formule $\frac{-2}{b} \cdot \frac{bbdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} - \frac{dz}{z-b}$, a pour intégrale L. $\frac{z+b}{z-b}$, & la formule $\frac{2bdz}{bb-zz} = \frac{dz}{b+z} + \frac{dz}{b-z}$, a pour intégrale L. $(bb-zz)$.

La fraction $\frac{2azdz}{zz+bb}$ a pour intégrale aL.$(zz+bb)$. L'intégrale de la fraction $\frac{dz}{zz+bb} = \frac{1}{b^2} \times \frac{bbdz}{zz+bb}$ est $= \frac{1}{b^2} \cdot f$, f étant un arc de cercle dont la tangente $= z$ & le rayon $= b$. L'intégrale S. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$, comme il est aisé de le vérifier en repassant de l'intégrale à la différentielle. Mais $\frac{dy}{1+y^2}$ est la différentielle d'un arc dont le rayon $= 1$ & la tangente $= y$, ainsi cette intégrale qui se présente sous une forme imaginaire, est cependant très-réelle. Mais l'arc dont la tangente $= x$ & le rayon $= 1$, est $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} -$ &c. (sec-

tion 2e. n°. 31). Donc la somme de la série $x - \frac{x^3}{3} + \&c.$ est $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} L. \left(\frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}\right)$. Si dans la fraction $\frac{a\,x\,d\,x}{x^2 + c\,x + g}$ on fait $x + \frac{1}{2}c = z$ ou $x = z - \frac{1}{2}c$, pour avoir $dx = dz$ & $x^2 + c\,x + g = z^2 - c\,z + \frac{1}{4}c^2 + c\,z - \frac{1}{2}c^2 + g = z^2 - \frac{1}{4}c^2 + g = z^2 + b^2$, en faisant $g - \frac{1}{4}c^2 = b^2$; il est visible qu'elle deviendra $\frac{azdz - \frac{1}{2}acdz}{zz + bb} = \frac{a\,z\,d\,z}{zz + bb} - \frac{\frac{1}{2}\,a\,c\,d\,z}{z\,z + b\,b}$, fraction qu'il est maintenant facile d'intégrer, que $b\,b$ soit une quantité positive, ou négative, en faisant attention que $\frac{-b\,b\,.\,d\,z}{z\,z + bb}$ est la différentielle d'un arc de cercle dont la co-tangente $= z$.

Si on avoit une fraction de cette forme $\frac{a\,x\,d\,x + f\,d\,x}{x^2 + c\,x + g}$, par la même substitution de $z = x + \frac{1}{2}c$, on la réduiroit en deux autres, dont l'une seroit de la forme $\frac{A\,z\,d\,z}{z\,z + b\,b}$, & l'autre de la forme $\frac{B.\,d\,z}{zz + b\,b}$, qui sont faciles à intégrer.

56. *La formule* $\frac{x^n\,d\,x}{(x + a)^m}$, *peut s'intégrer facilement par la méthode suivante.* Je prends la différentielle de la formule $\frac{x^q}{(x + a)^p}$, de cette manière $d.\,\frac{x^q}{(x + a)^p} = \frac{q\,x^{q-1}\,d\,x}{(x + a)^p} - \frac{p\,x^q\,d\,x}{(x + a)^{p+1}}$ (en considérant successivement le numérateur & le

dénominateur comme variables) ; donc $S. \frac{x^q\,dx}{(x+a)^{p+1}} = -\frac{1}{p}.\frac{x^q}{(x+a)^p} + \frac{q}{p} \times S. \frac{x^{q-1}\,dx}{(x+a)^p}$. Dans cette formule, je suppose d'abord $q = n$, $p + 1 = m$, & j'ai $S. \frac{x^n\,dx}{(x+a)^m} = \frac{-1}{m-1}.\frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} + \frac{n}{m-1} S. \frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-1}}$. Faisons maintenant $q = n-1$, $p+1 = m-1$, pour avoir $S. \frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-1}} = \frac{-1}{m-2}.\frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-2}} + \frac{n-1}{m-2} S. \frac{x^{n-2}\,dx.}{(x+a)^{m-2}}$. En faisant $q = n-2$; & $p + 1 = m - 2$, on aura facilement la valeur de $S. \frac{x^{n-2}\,dx}{(x+a)^{n-2}}$, & ainsi de suite ; de sorte que

$$S. \frac{x^n\,dx}{(x+a)^m} = \frac{-1}{m-1}.\frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} - \frac{n}{(m-1).(m-2)}.\frac{x^{n-1}}{(x+a)^{m-2}} - \frac{n.(n-1)}{(m-1).(m-2).(m-3)}.\frac{x^{n-2}}{(x+a)^{m-3}} \ldots + \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots 1}{(m-1).(m-2).(m-3)\ldots(m-n)}.S.\frac{dx}{(x+a)^{m-n}};$$

Si $m - n = 1$, $S. \frac{dx}{(x+a)^{m-n}}$ sera $= L.(x+a)$;

si $m-n=u$, alors $S.\frac{dx}{(x+a)^{m-n}} = S.\frac{dx}{(x+a)^u} =$ $S.dx.(x+a)^{-u} = \frac{(x+a)^{-u+1}}{-u+1}$. Si n est $=m$ ou $>$ m, on poussera seulement le calcul jusqu'à ce que l'exposant du dénominateur soit $=1$, & le dernier terme sera alors $\frac{n.(n-1).(n-2)...(n-m+1)}{(m-1).(m-2).(m-3)...1} \times S.\frac{x^{n-m+1}dx}{x+a}$. Supposant $x^{n-m+1} = x^u$, & divisant x^u par $x+a$, jusqu'à ce que la division ne soit plus possible, on aura une suite de termes de cette forme, $x^{u-1}dx + Ax^{u-2}dx$. &c. Et le dernier terme sera de cette forme $\frac{B\,dx}{x+a}$; or tous ces termes sont intégrables algébriquement, excepté le dernier qui s'intégre par les logarithmes. Si n étoit négatif, on pousseroit le calcul jusqu'à ce que l'exposant de $x+a$ fût $=1$, & l'on changeroit le signe de n.

Nous n'avons pas supposé dans cet exemple, que la fraction soit pûre, c'est-à-dire que l'exposant de la variable dans le numérateur soit plus petit que dans le dénominateur.

57. Soit la formule $\frac{dx}{x^n(xx+ga)}$ (a étant une quantité positive, & g étant positif, ou négatif comme on voudra) $= \frac{dx}{ga.x^n + x^{n+2}}$.

Par une continuelle division, on trouve $\frac{dx}{ga.x^n} - \frac{dx}{g^2a^2x^{n-2}} + \frac{dx}{g^3a^3x^{n-4}}$ &c.

Si n eſt un nombre pair, le dernier terme qu'on doit ajouter ſera $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}.(xx+ga)} = \frac{1}{b^n} \cdot \frac{dx}{xx+bb}$, en ſuppoſant $ga = bb$. Mais l'on a $S. \frac{bbdx}{xx+bb} = f$, f étant un arc de cercle dont la tangente $= x$ & le rayon $= b$. On a auſſi $S. \frac{-2bdx}{xx-bb} = S. \frac{dx}{x+b} - S. \frac{dx}{x-b} = L. \frac{x+b}{x-b}$; ainſi la formule $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}. (xx+ga)}$ dépend, ou de la rectification du cercle, ou des logarithmes. Le ſigne $+$ a lieu ſi n eſt pairement pair, ou un nombre de la ſérie, 4, 8, 12 &c. Mais on doit ſe ſervir du ſigne $-$ ſi n eſt impairement pair, ou de la ſérie 2, 6, 10, 14 &c. Si n eſt impair, il faudra pouſſer le calcul juſqu'à ce que l'on parvienne à ces deux termes $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x} \mp \frac{xdx}{g^{\frac{n+1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} (xx+ga)}$; qui s'intégrent tous les deux par les logarithmes. On ſe ſervira des ſignes ſupérieurs, ſi n eſt contenu dans la ſérie 1, 5, 9, 13 &c. mais les ſignes inférieurs auront lieu ſi n eſt un des nombres de la ſérie 3, 7, 11, 15 &c.

58. Soit la fraction $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m}$, à cauſe qu'en développant le dénominateur on y trouve le terme

($x^m x^m = x^{2m}$, il eſt néceſſaire que $n < 2m$; de plus nous ſuppoſons que n & m ſont poſitifs & entiers. Cela poſé, il eſt aiſé de voir que $d. \frac{x^q}{(xx+ga)^p} = \frac{qx^{q-1}dx}{(xx+ga)^p} - \frac{2px^{q+1}dx}{(xx+ga)^{p+1}}$; donc S. $\frac{x^{q+1}dx}{(xx+ga)^{p+1}} = \frac{-1}{2p} \cdot \frac{x^q}{(xx+ga)^p} + \frac{q}{2p}$ S. $\frac{x^{q-1}dx}{(xx+ga)^p}$. Suppoſez maintenant $q+1 = n$, $p+1 = m$; donc, par l'équation qu'on vient de trouver, S. $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m} = \frac{-1}{2.(m-1)} \cdot \frac{x^{n-1}}{(xx+ga)^{m-1}} + \frac{n-1}{2.(m-1)} \times$ S. $\frac{x^{n-2}dx}{(xx+ga)^{m-1}}$. Faites $q+1 = n-2$, $p+1 = m-1$, pour avoir S. $\frac{x^{n-2}dx}{(xx+ga)^{m-1}} = \frac{-1}{2.(m-2)} \cdot \frac{x^{n-3}}{(xx+ga)^{m-2}} + \frac{n-3}{2.(m-2)} \times$ S. $\frac{x^{n-4}dx}{(xx+ga)^{m-2}}$. En faiſant $q+1 = n-4$, & $p+1 = m-2$, on aura facilement la valeur de S. $\frac{x^{n-4}dx}{(xx+ga)^{m-2}}$, & ainſi de ſuite. L'on continuera le calcul autant qu'il ſera néceſſaire.

Si n eſt pair, on continuera juſqu'à ce que l'expoſant du diviſeur ſoit $= 1$, auquel cas le dernier terme de la ſuite contiendra S. $\frac{x^{n-2m+2}dx}{xx+ga}$, & comme $n < 2m$, l'expoſant de x dans le numérateur ſera ou $= 0$, ou négatif. Dans le premier cas l'intégrale dépend du cercle; mais dans

le ſecond, elle s'intègre par la méthode ci-deſſus (57). Si n eſt impair & poſitif, ou l'on a $n = 2m - 1$, ou $n > 2m - 1$ (ſi la fraction n'eſt pas pure). Dans l'un & dans l'autre cas on continuera le calcul juſqu'à ce que l'expoſant du dénominateur ſoit $= 1$, & l'on aura au dernier terme S. $\frac{x^{n-2m+2}dx}{xx+ga}$. Mais dans le premier cas l'expoſant de x au numérateur ſera $= 1$, & l'on ſait que S. $\frac{xdx}{xx+ga} = \text{L.}(xx+ga)^{\frac{1}{2}}$. Dans le ſecond cas l'expoſant du numérateur ſera > 2; donc par une diviſion continuelle, on parviendra à un terme de cette forme $\frac{Bxdx}{xx+ga}$, qu'on ſait intégrer par les logarithmes, & les autres termes ſeront intégrables algébriquement. Si $n < 2m - 1$, on continuera le calcul juſqu'à ce que l'expoſant de x dans le numérateur ſoit $= 1$, & l'on aura au dernier terme S. $\frac{xdx}{(xx+ga)^{\frac{2m-n-1}{2}}}$ $=$ S. $\frac{xdx}{(xx+ga)^q}$. q étant un nombre entier; puiſque $\frac{n-1}{2}$ eſt entier à cauſe de n impair. Si $q = 1$, on intègre par les logarithmes; ſi $q > 1$, l'on a S. $xdx.(xx+ga)^{-q} = \frac{1}{2}.\frac{(xx+ga)^{-q+1}}{-q+1}$. On voit auſſi que S. $\frac{dx}{x^m} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, excepté le cas de $m = 1$; car alors S. $\frac{dx}{x^m} = \text{L.}x$.

59. Cela posé, je dis que toute fraction rationnelle pure de cette forme

$$\frac{ax^{m-1}dx + bx^{m-2}dx + cx^{m-3}dx + \&c.}{(x+g)^m . f},$$ est intégrable exactement; car en négligeant le facteur commun $\frac{1}{f}$, qui ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration, l'on réduira la fraction proposée en autant de fractions $\frac{ax^{m-1}dx}{(x+g)^m} + \frac{bx^{m-2}dx}{(x+g)^m} +$ &c. qu'il y a de termes au numérateur, & chacune dépend de la fraction $\frac{x^n dx}{(x+g)^m}$ *. qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (56).

Toute fraction rationnelle pure de cette forme; ou qu'on peut réduire à cette forme

$$\frac{1}{f}.\frac{ax^{m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx + \&c.}{(xx+ga)^m}$$

est intégrable, car elle est égale à la somme des fractions $\frac{1}{f}a.\frac{x^{2m-1}dx}{(xx+ga)^m}, \frac{1}{f}.b\frac{x^{2m-2}dx}{(xx+ga)^m}$, &c. or en faisant $m-1=n$ dans la 1re, $m-2=n$ dans la 2e, &c. L'intégrale de chacune de ces fractions dépend de S. $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m}$, intégrale qu'on peut trouver par ce qu'on vient de dire (58).

* Si on fait $m-1=n$, la première fraction sera $=a\frac{x^n dx}{(x+g)^m}$.

Toute fraction de cette forme

$$\frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx \text{ \&c.})}{(x^2f + hx + L.)^m}$$

$$= \frac{1}{f^m} \cdot \frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + \text{ \&c.})}{(x^2 + 2gx + p)^m}$$

(en divisant le numérateur par f^m & le dénominateur par f, qui est censée élevée à la puissance m, & faisant $\frac{h}{f} = 2g$, $\frac{L}{f} = p$) peut être intégrée ; car en supposant $x + g = z$, l'on a $x = z - g$, & $x^2 + 2gx + p = zz + p - g^2 = zz + ga$, en faisant $p - g^2 = ga$. Maintenant si dans le numérateur l'on substitue la valeur de x, l'on aura une fraction de cette forme

$$\frac{a'z^{2m-1}dz + b'z^{2m-2} + c'z^{2m-3}dz \text{ \&c.}}{(zz + ga)^m}.$$

qui est de la forme de celle dont on vient de parler & qu'on peut intégrer de même, que ga soit une quantité positive ou négative,

60. Soit maintenant la fraction pure $\frac{pdx}{q}$, p étant une fonction de x dont l'exposant soit moindre que celui de x dans q autre fonction rationnelle de x. Pour intégrer cette fraction, il faut trouver les facteurs de q, ce qui se fait en égalant q à 0, & cherchant ensuite les racines de l'équation $q = 0$.

Si, par exemple, $q = x^3 - ax^2$, je fais $x^3 - ax^2 = 0$; donc $x^2 = 0$, & $x - a = 0$; ainsi les facteurs de q sont x, x & $x - a$, ou x^2 & $x - a$. On réduira ensuite la fraction proposée en d'autres fractions pures dont chacune ait pour dénominateur un des facteurs du

dénominateur de la proposée, & il sera ensuite facile d'intégrer.

Soit $\frac{p\,dx}{q} = \frac{M\,dx}{(x+a).N}$, M & N étant des fonctions rationnelles de x. Pour avoir la fraction correspondante au facteur $x+a$, je suppose cette fraction $= \frac{A\,dx}{x+a}$. A l'égard de la fraction qui, jointe à celle-ci, peut rendre la proposée, je la suppose égale à $\frac{R\,dx}{N}$; donc $\frac{M\,dx}{(x+a)N} = \frac{A\,dx}{x+a} + \frac{R\,dx}{N}$. Il est évident que R sera une fonction entière de x; car autrement, ayant réduit les fractions au même dénominateur, le numérateur ne seroit pas une fonction entière de x; ce qui est contre la supposition. Je réduis au même dénominateur, & j'ai $\frac{M\,dx}{(x+a).N} = \frac{AN\,dx + (x+a).R.dx}{(x+a).N}$.

En comparant les numérateurs, l'on a $M = AN + (x+a).R$, ou $R = \frac{M - AN}{x+a}$; donc puisque R doit être une fonction rationnelle & entière, M—AN doit être exactement divisible par $x+a$; Ainsi en faisant $x+a = 0$, ou $x = -a$, l'on aura $M - AN = 0$, ou $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & AN la quantité $-a$ au lieu de x.

61. Soit la fraction pure $\frac{ax\,dx}{(x-2a).(xx-aa)}$, on demande de trouver la fraction qui convient au facteur $x-2a$. Représentant la fraction cherchée par $\frac{A\,dx}{x-2a}$, celle qui convient à l'autre facteur $xx-aa$, étant $= \frac{R\,dx}{xx-aa}$; l'on aura $\frac{ax\,dx}{(x-2a).(xx-aa)} = \frac{A\,dx}{x-2a} + \frac{R\,dx}{xx-aa}$. L'on aura aussi $ax = M$, $xx - aa = N$; & $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le fac-

teur $x-2a$ égalé à o. Mais $x-2a=0$, donne $x=2a$; donc $A=\frac{2aa}{3aa}=\frac{2}{3}$; donc la fraction cherchée est $=\frac{2}{3}\cdot\frac{dx}{x-2a}$.

Pour avoir la fraction $\frac{A\,dx}{x+a}$, qui convient au facteur $x+a$, l'autre fraction étant $\frac{R\,dx}{xx-3ax+2aa}$. * l'on remarquera que $M=ax$, & $N=xx-3ax+2aa$. Donc $A=\frac{M}{N}$ devient $=\frac{-aa}{6aa}=-\frac{1}{6}$, en substituant $-a$ au lieu de x; donc la fraction qui convient au facteur $x+a$ est $=\frac{-dx}{6(x+a)}$. Si l'on veut avoir la fraction qui convient au facteur $x-a$, on pourra encore supposer cette fraction $=\frac{A\,dx}{x-a}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit rendre la proposée étant $=\frac{R\,dx}{xx-ax-2aa}$; donc $M=ax$, & $N=xx-ax-2aa$. Faites $x=a$, & vous aurez $A=\frac{M}{N}=\frac{aa}{-2aa}=\frac{-1}{2}$; donc la fraction cherchée est $=\frac{-dx}{2.(x-a)}$. En effet si l'on réduit au même dénominateur les trois fractions qu'on vient de trouver & qu'on en fasse la somme, l'on aura la fraction proposée. Maintenant je prends les intégrales de ces fractions & leur somme $\frac{2}{3}.L.(x-2a)-\frac{1}{6}L.(x+a)-\frac{1}{2}.L.(x-a)$, donne l'intégrale de la fraction proposée.

62 Telle est la méthode qu'on peut suivre pour trouver une fraction simple qui convienne à un facteur, simple qui n'en a pas d'autre qui lui soit égal. Voyons maintenant comment on peut s'y prendre lorsqu'il y a des facteurs égaux.

* *Le dénominateur est le produit des facteurs $x-2a$, & $x-a$.*

Soit la fraction pure $\frac{M\,dx}{N.(x+a)^2}$, dans laquelle N ne contient pas le facteur $x+a$. Supposons que la fraction qui convient au facteur $(x+a)^2$ soit $=\frac{Ax\,dx+B\,dx}{(x+a)^2}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit être égale à la proposée, étant $=\frac{R\,dx}{N}$; donc $\frac{M}{(x+a)^2.N}=\frac{Ax+B}{(x+a)^2}+\frac{R}{N}$. Multipliant cette équation par N & transposant, il vient $\frac{M-N.(Ax+B)}{(x+a)^2}=R$. Mais R doit être une fonction entière; donc $M-N.(Ax+B)$ sera divisible deux fois exactement par $x+a$. Et en supposant $x=-a$, cette quantité sera $=0$, ce qui servira à déterminer B; car alors $M-N.(Ax+B)=0$, ou $\frac{M}{N}-Ax=B$, en supposant $x=-a$. Si après avoir substitué la valeur de B, on divise la même quantité par $x+a$, parce que le quotient de cette division est encore divisible par $x+a$, en supposant encore $x=-a$, il deviendra $=0$; d'où l'on tirera une nouvelle équation qui, avec celle qu'on a déjà trouvée, suffira pour déterminer A & B.

Soit la fraction pure $\frac{(ax-2xx).dx}{(x+a)^2.(xx-2aa)}$. On demande la fraction qui répond au facteur quarré $(x+a)^2$, l'on a $M=ax-2xx$, $N=xx-2aa$. La quantité $M-N.(Ax+B)$ qui doit faire trouver les valeurs de A & de B, sera donc $=ax-2xx+(2aa-xx).(Ax+B)$. Mettez dans cette quantité $-a$ au lieu de x, pour avoir $-3aa+aa.(B-aA)=0$; Donc $B=3+A.a$. Substituons cette valeur de B dans la même quantité, elle deviendra $ax-2xx+(2aa-xx).(Ax+3+Aa)$, qui doit être divisible par $x+a$. Disposez-la ainsi, $ax-5xx+6aa+(2aa-xx).A.(x+a)$, ou $(6a-5x).(x+a)+(2aa-xx).A.(x+a)$. Divisez cette quantité par $x+a$, pour avoir $6a-5x+(2ax-xx).A$.

Supposant de nouveau $x = -a$, cette dernière quantité devient $11 . a + aa . A = 0$; donc $A = -\frac{11}{a}$, $B = 3 + A . a = 3 - 11 = -8$; & la fraction cherchée est $= \frac{-11 xdx - 8 adx}{a . (x + a)^2}$. Cette fraction est $= \frac{-11 x dx}{a . (x + a)^2} - \frac{8 dx}{(x + a)^2}$, dont (56) l'intégrale dépend de S. $\frac{x^n dx}{(x + x)^p}$, qu'on peut avoir par la méthode ci-dessus. Pour trouver les fractions qui répondent aux facteurs $x + \sqrt{2aa}$, $x - \sqrt{2aa}$, qui résultent du facteur $xx - 2aa$ égalé à o, on fera $\sqrt{2aa} = b$, & l'on cherchera par la méthode ci-dessus (61), les fractions correspondantes aux facteurs simples $x + b$, $x - b$.

S'il y avoit un facteur triple $(x + a)^3$, la fraction correspondante auroit cette forme $\frac{(Ax^2 + Bx + C) . dx}{(x + a)^3}$.

Soit la fraction $\frac{M dx}{(x + a)^3 . N}$, N ne contenant pas $x + a$, l'on aura $\frac{M}{(x + a)^3 . N} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x + a)^3} + \frac{R}{N}$. En raisonnant comme ci-dessus, l'on verra que $R = M - N . (A . x^2 + B x + C)$, & que cette dernière quantité est divisible par $(x + a)^3$. Supposant dans cette quantité égalée à o, $x = -a$, l'on aura la valeur de C, exprimée en A & en B, substituant cette valeur de C dans la valeur de R; vous diviserez cette valeur par $x + a$, & égalant ensuite le résultat à o, vous aurez une équation qui déterminera B. Substituant de même cette valeur de B, divisant par $x + a$, & égalant le quotient à o, après avoir fait $x = -a$, vous aurez la valeur de A, & en rétrogradant vous connoîtrez B & C. C'est la même méthode s'il y a 4, 5, ou un plus grand nombre de facteurs égaux. Si le nombre des facteurs égaux est m, la fraction correspondante au facteur $(x + a)^m$ sera de cette forme

$$\frac{(A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots\ldots + F) dx}{(x + a)^m}$$

Soit la fraction $\frac{a^6 dx}{(x-a)^5 . x}$. Je cherche d'abord la fraction simple qui convient au facteur x qui n'en a pas d'autre qui lui soit égal. Soit cette fraction $\frac{A dx}{x}$, selon ce qu'on a dit ci-dessus (61) l'on a $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le facteur x égalé à o ; donc puisque $M = a^6$, & $N = (-a)^5$, l'on aura $A = \frac{a^6}{(-a)^5} = -a$, & la fraction cherchée sera $= \frac{-a dx}{x}$. Pour avoir la fraction correspondante au facteur quintuple $(x-a)^5$, je remarque que $M = a^6$, $N = x$, & $R = M - N.(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$ quantité évidemment $= - Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 - Ex + a^6$ (I). Ayant fait $x = a$, vous trouverez (en égalant à o), $E = -A.a^4 - Ba^3 - Ca^2 - Da + a^5$. Substituez cette valeur dans la formule (I) pour avoir $-Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 + (Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da - a^5).x + a^6$. Divisant cette dernière quantité par $x - a$, l'on aura cette seconde formule

$$\text{II.} \quad \begin{array}{lllll} -Ax^4 & -A.a.x^3 & -Aa a.x^2 & -Aa^3 x & -a^5 \\ & -Bx^3 & -Ba.x^2 & -Ba^2 x & \\ & & -Cx^2 & -Cax & \\ & & & -Dx & \end{array}$$

Faites $x = a$, pour avoir $-4Aa^4 - 3Ba^3 - 2Ca^2 - Da - a^5 = 0$; donc $D = -4Aa^3 - 3Ba^2 - 2Ca - a^4$. Mettant cette valeur dans la seconde formule, il vient

$$\begin{array}{llll} -Ax^4 & -Aax^3 & -Aa^2x^2 & +3a^3x - a^5. \\ & -Bx^3 & -Ba.x^2 & +2Ba^2x \\ & & -Cx^2 & +Ca.x \\ & & & +a^4 x \end{array}$$

Divisez cette quantité par $x - a$ pour avoir la troisième formule III. $\begin{array}{l} -Ax^3 - 2Aa.x^2 - 3Aa^2x + a^4 \\ \quad\; - Bx^2 \quad\;\; - 2Ba.x \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - Cx \end{array}$

Faites dans cette formule $x = a$, & vous aurez l'équation $-6Aa^3 - 3Ba^2 - Ca + a^4 = 0$; donc l'on a $C = -6Aa^2 - 3Ba + a^3$. Substituez cette valeur de C dans la troisième formule pour avoir

$$\begin{array}{l} -Ax^3 \; - 2A.ax^2 + 3Aa^2x + a^4 \\ \quad\; - Bx^2 \quad + Ba.x \\ \qquad\qquad\quad\; - a^3x \end{array}$$

; Divisez cette équation par $x - a$, pour avoir la quatrième formule IV. $\begin{array}{l} -Ax^2 - 3A.a.x - a^3 \\ \qquad - Bx \end{array}$. Faites $x = a$, & vous aurez l'équation $-4Aa^2 - Ba - a^3 = 0$; donc $B = -4Aa - a^2$. Substituant cette valeur de B dans la quatrième formule, il vient $\begin{array}{l} -Ax^2 + Aax \\ \qquad\;\; + a^2x \end{array}$ $- a^3$; divisant cette quantité par $x - a$, l'on a la cinquième formule V. $-Ax + a^2$. Supposant $x = a$, il vient $-Aa + a^2 = 0$, ou $A = a$. Donc en rétrogradant l'on a $B = -5a^2$, $C = 10a^3$, $D = -10a^4$, $E = 5a^5$; ainsi la formule cherchée sera

$$\frac{(ax^4 - 5a^2.x^3 + 10a^3.x^2 - 10a^4.x + 5a^5).dx}{(x-a)^5}.$$

En effet si l'on ajoute cette fraction avec la fraction $-\frac{adx}{x}$ & qu'on réduise au même dénominateur, l'on trouvera (toute réduction faite) la fraction proposée.

Soit la fraction $\frac{(x^2 - b^2)dx}{x.(xx + bb)}$, la fraction qui vient du facteur x se trouve par la méthode ci-dessus

dessus (61.) $= \frac{-dx}{x}$. Je cherche les facteurs simples que donne le facteur double $xx + bb$, en égalant ce facteur à o; ce qui donne $x^2 = -bb$, ou $x = \pm b\sqrt{-1} = \pm m$, en supposant la quantité imaginaire $b\sqrt{-1} = m$. Il s'agit donc de trouver les fractions qui conviennent aux facteurs $x - m$ & $x + m$. La fraction qui répond au premier facteur est (par le N°. 61) $= \frac{dx}{x-m}$, & la fraction qui répond au second facteur $x + m$ est $= \frac{dx}{x+m}$. Si l'on réduit ces deux fractions imaginaires au même dénominateur, & qu'on en prenne la somme, l'on aura (en remettant $b\sqrt{-1}$ au lieu de m) $\frac{2xdx}{x^2+b^2}$, quantité réelle. Intégrant cette fraction, & la fraction $\frac{-dx}{x}$, l'on aura l'intégrale de la fraction proposée $= \text{L.}(x^2 + b^2) - \text{L.}x = \text{L.}\left(\frac{x^2+b^2}{x}\right)$.

Si l'on avoit intégré les fractions $\frac{dx}{x-m}$, $\frac{dx}{x+m}$ avant de les réduire au même dénominateur, l'on auroit eu $\text{L.}(x-m) + \text{L.}(x+m) = \text{L.}(x^2 - m^2) = \text{L.}(x^2 + b^2)$, ce qui fait voir que la somme des deux logarithmes imaginaires peut être une quantité réelle. En général si une fraction rationnelle a des facteurs imaginaires la somme des intégrales des deux fractions qui appartiennent à deux facteurs $x - m$, $x + m$, m étant une quantité imaginaire, sera toujours une quantité réelle.

63. Soit la formule $\frac{b^6\,dx}{x^2.(x^2+b^2)^2}$. La fraction qui répond au facteur double x^2 est $= \frac{b^2 dx}{x^2}$, ce que l'on

trouvera par la méthode ci-dessus (62)*. Le facteur $(x^2+bb)^2$ donne $(x-m)^2.(x+m)^2$, en faisant $m=b\sqrt{-1}$. La fraction correspondante au facteur $(x-m)^2$, sera (par la méthode qu'on vient d'expliquer) $=$

$$\frac{\left(\frac{3}{4}m.x-mm\right)dx}{(x-m)^2},$$ la fraction correspondante au facteur

$(x+m)^2$ étant $=\frac{\left(-\frac{3}{4}m.x-mm\right)dx}{(x+m)^2}$. La somme de ces fractions donne la fraction réelle $\frac{(-b^2x^2-2b^4)dx}{(x^2+b^2)^2}$, en substituant la valeur de m. Pour intégrer cette fraction, je la décompose en ces deux-ci $\frac{-b^2x^2dx}{(x^2+b^2)^2}$, $\frac{-2b^4dx}{(x^2+b^2)^2}$: L'intégration de chacune dépend de l'intégration de la fraction $\frac{x^n dx}{(x^2+ga)^m}$, qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (58).

A l'égard de l'intégrale de la fraction $\frac{b^2dx}{x^2}$, elle est égale à $S.b^2x^{-2}dx = -b^2x^{-1} = -\frac{b^2}{x}$.

On peut voir par-là que la somme des fractions que peuvent donner à la fois un même nombre de facteurs $(x-m)^n$ & $(x+m)^n$, sera toujours une fraction réelle quand même m seroit imaginaire.

Si l'on avoit une fraction de cette forme

$$\frac{(ax^{2m+2n+2}+bx^{2m+2n+1})dx}{x.(x^2-a^2)^n(x^2+2ax+b^2)^m}$$ on pourroit tou-

* Les Commençans peuvent supposer $x^2=(x+o)^2$, afin de fixer leur imagination.

jours l'intégrer. Car il est aisé de voir qu'on trouvera facilement la fraction correspondante au facteur x. Le facteur $(x^2-a^2)^m$, donne $(x-a)^m(x+a)^m$. Le facteur $(x^2+2ax+b^2)^m$ égale à o, donne $x^2+2ax=-b^2$, $x^2+2ax+aa=a^2-b^2$, ou $x+a=\pm p$, [en faisant $\sqrt{(a^2-b^2)}=p$], ou $x+a\mp p=0$; donc le facteur proposé donnera $(z-p)^m(z+p)^m$, en faisant $x+a=z$, ce qui donne $dx=dz$; Mais on trouvera facilement les fractions correspondantes aux facteurs $(z-p)^m$, $(z+p)^m$, & la somme de ces fractions sera réelle, quand même p seroit imaginaire. Il suffira donc de chercher d'abord les fractions des facteurs simples réels ou imaginaires, qu'on peut représenter par x^m, ou $(x+g)^m$, ou $x-g)^m$, & pour avoir les fractions que peut donner un facteur double de la forme $x^2+2ax+b^2$ dont les racines sont supposées imaginaires, l'on fera $\sqrt{(aa-bb)}=p$, & $x+a=z$, on substituera dz au lieu de dx, & $z-a$ au lieu de x, soit dans la proposée, soit dans les fractions correspondantes aux facteurs $(z-p)^m$, $(z+p)^m$. Si les facteurs de $(x^2+2ax+b^2)^m$ étoient réels, on pourroit les représenter par $(x-g)^m$, $(x+f)^m$, & il seroit inutile de faire $x+a=z$. Il n'est pas même nécessaire de le faire dans aucun cas, puisqu'en faisant $a-p=g$, $a+p=f$, on peut représenter les facteurs $(x+a-p)^m$ $(x+a+p)^m$ par $(x+g)^m$, $(x+f)^m$.

64. REMARQUE. Quelque soit le dénominateur d'une fraction rationnelle, on peut, en l'égalant à o, chercher ses facteurs réels, & s'il a des facteurs imaginaires, ils seront en nombre pair, & en multipliant deux à deux ceux qui contiennent la même quantité imaginaire, mais avec des signes différens, & la même quantité réelle avec les mêmes signes, l'on aura des facteurs réels du second degré; or les fractions qui résulteront de ces facteurs donneront des quantités réelles.

COROLLAIRE. On peut conclure de la doctrine qu'on vient d'exposer, que toute fraction ra-

tionnelle eſt toujours intégrable, ou algébriquement, ou par les logarithmes, ou par les arcs de cercle. Véritablement nous n'avons pas de méthode générale pour trouver les facteurs réels, ſimples ou doubles du dénominateur d'une fraction rationnelle quelconque; mais c'eſt un défaut de l'algèbre plutôt que de la méthode d'intégration qu'on vient de développer.

Il ne ſera pas inutile de remarquer que ſi quelque facteur du dénominateur étoit multiplié par une conſtante a, par exemple, & que l'on eût $ax + gb$ pour un tel facteur, on pourroit diviſer ce facteur par a, pour avoir $x + \frac{gb}{a} = x + c$, en faiſant $\frac{gb}{a} = c$; Mais on diviſeroit auſſi le numérateur par a. En général, il n'eſt pas difficile de voir comment il faut s'y prendre pour que chacun des facteurs du dénominateur contienne au premier terme la variable x ſans aucune conſtante.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DE LA RECTIFICATION DE L'ELLIPSE OU DE L'HYPERBOLE, SÉPARÉMENT OU ENSEMBLE.

65. Selon ce qu'on a dit dans la ſection précédente (38), ſi l'on fait l'abſciſſe d'une hyperbole à compter du centre $= z$, l'ordonnée $= u$, le demi-premier axe $= a$, le demi-ſecond axe $= b$, $\frac{bb}{aa} = g$, $zz = \frac{ax + aa}{g + 1}$, $\frac{aa - bb}{a} = p$, la différentielle de l'arc hyperbolique ſera $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x^2 \pm px - bb)}}$; Le ſigne + a lieu ſi $aa - bb$ eſt une quantité poſitive, & le ſigne — ſi cette quantité eſt négative. Mais ſi l'hyperbole eſt équilatere, la différentielle de l'arc ſera $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(xx - bb)}}$.

En faiſant la puiſſance de l'hyperbole $= aa$, l'abſciſſe aſſymptotique $= z$, $a^2 = g$, $z = x^{\frac{1}{2}}$, l'élément de l'arc hyper-

bolique sera $= \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}.dx\sqrt{(xx+g^2)}$. Dans l'ellipse en supposant $\frac{bb}{aa}=g$, l'abscisse du centre $=z$, $zz=\frac{ax-aa}{g-1}$, $\frac{aa+bb}{a}=p$, l'élément de l'arc elliptique sera $=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(px-xx-bb)}}$.

66. COROLLAIRE I. L'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}}\times dx\sqrt{(xx+bb)}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatere entre les assymptotes perpendiculaires, dont l'équation est $zu=1.b=b$, z étant l'abscisse assymptotique comptée du centre, u l'ordonnée, & en faisant $zz=x$. Car soit s cet arc hyperbolique, on aura $ds=\sqrt{(dz^2+du^2)}=z^{-2}dz\sqrt{(z^4+bb)}=\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}}dx\,(xx+bb)^{\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{3}{2}}dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}=2ds$, & $S.x^{-\frac{3}{2}}dx\,(xx+bb)^{\frac{1}{2}}=2s$ plus ou moins une constante C. Il suit de-là que l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}}dx(e+fxx)^{\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e & f sont positifs : car $e+fxx=f.(\frac{e}{f}+xx)$; donc $x^{-\frac{3}{2}}dx(e+fxx)^{\frac{1}{2}}=f^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{3}{2}}dx(\frac{e}{f}+x^2)^{\frac{1}{2}}=f^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}.dx\,(xx+bb)^{\frac{1}{2}}$, en faisant $\frac{e}{f}=bb$.

67. COROLLAIRE II. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatère dont l'axe $=2b$, l'équation étant $uu=zz-bb$, z étant l'abscisse comptée du centre, u l'ordonnée au premier axe, & faisant $bx=2zz-bb$, ou $z=\sqrt{(\frac{bx+bb}{2})}$. Car en supposant que cet arc est $=s$,

l'on aura $ds = \frac{dx\sqrt{bx}}{2\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx.(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$ *; $\frac{2ds}{\sqrt{b}} = x^{\frac{1}{2}} dx.(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{b}} = S.x^{\frac{1}{2}} dx \times (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il suit delà que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fxx)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole lorsque e est négatif & f positive; car $(e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{f} + xx\right)^{-\frac{1}{2}}$; donc en faisant $\frac{e}{f} = -bb$, l'on aura $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc, &c.

68. COROLLAIRE III. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $= 2b$, le premier $= 2a$, & dont l'équation est $uu = \frac{bb}{aa}(zz-aa)$, en prenant u pour l'ordonnée, & z pour l'abscisse comptée du centre, & en faisant $\frac{bb}{aa} = g$, $z = \sqrt{\left(\frac{ax+aa}{g+1}\right)}$, $\pm p = \frac{aa-bb}{a}$. Car soit s cet arc, l'on aura $ds = \sqrt{(dz^2+du^2)} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S.x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm p - bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il est aisé de voir que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque h étant positif, e est négatif, quel que soit f; car $e + fx + hx^2 = h\left(\frac{e}{h} + \frac{fx}{h} + x^2\right)$; donc la différen-

* Cela suit du N°. 65, en changeant a en b.

tielle dont on vient de parler eſt $h^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{h}+\frac{fx}{h}+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= h^{-\frac{1}{2}}(xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ en faiſant $-bb = \frac{e}{h}$, & $\pm p = \frac{f}{h}$.

69. COROLLAIRE IV. L'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'ellipſe dont un des axes eſt $2a$, l'autre $2b$, & l'équation $uu = \frac{bb}{aa}(aa - zz)$, en prenant u pour l'ordonnée, z pour l'abſciſſe comptée du centre ſur l'axe $2a$, & en faiſant $g = \frac{bb}{aa}$, $z = \sqrt{\left(\frac{ax-aa}{g-1}\right)}$, & $p = \frac{aa+bb}{a}$; car ſoit s l'arc de cette ellipſe, l'on aura $ds = \sqrt{(dz^2+du^2)} = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}dx\,(px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$, & $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S.\,x^{\frac{1}{2}}dx(px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$.

Il eſt aiſé de voir que l'intégrale de la différentielle trimone $x^{\frac{1}{2}}dx\,(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc elliptique, lorſque f étant poſitive, e & h ſont négatifs *; car ſi on fait $f = +c$ quantité poſitive, $e = -q$, & $h = -r$, cette différentielle deviendra $= x^{\frac{1}{2}}dx(cx - rxx - q)^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(\frac{c}{r}x - xx - \frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\,(px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant $p = \frac{c}{r}$ & $bb = \frac{q}{r}$.

* Si e, f & h étoient à la fois négatifs & x poſitif, la différentielle ſeroit imaginaire.

REMARQUE. Dans l'hyperbple on a $\pm\, p = \frac{aa - bb}{a}$ ou $aa \mp p\,a = bb$; donc en regardant a comme une inconnue, on trouvera par la méthode de la résolution des équations du second dégré, on trouvera, dis-je, $a = \pm \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} pp + bb)}$. On ne donne pas le signe $-$ au radical, afin d'éviter un axe négatif. Mais dans l'ellipse l'on a $p = \frac{aa + bb}{a}$, & $a = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 - bb)}$.

70. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^{\frac{1}{2}}\, dx\, (bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$. En supposant $x = \frac{bb}{z}$, on aura $x^{\frac{1}{2}} = b z^{-\frac{1}{2}}$, $dx = -\, bb z^{-2} dz$, $xx = b^4 z^{-2}$; donc la différentielle proposée est $= \frac{-\, b^2\, dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(zz - bb)}} =$ $\frac{-z^2\, dz - bb\, dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(zz - bb)}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{(zz - bb)}}$, comme il est aisé de le voir en réduisant la derniere fraction au dénominateur $z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(zz - bb)}$. Or S. $\frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{(zz - bb)}}$ est $= \frac{2s}{\sqrt{b}}$, s étant un arc d'hyperbole équilatère dont l'équation est $uu = yy - bb$, y étant l'abscisse comptée du centre sur le premier axe $2b$, & en faisant $y = \sqrt{\left(\frac{bz + bb}{2}\right)}$. Tout cela suit du corollaire II (67); Il suffit, pour le comprendre, de changer x en z dans l'équation $\frac{2s}{\sqrt{b}} =$ S. $x^{\frac{1}{2}}\, dx \times (xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$. L'autre différentielle $\frac{-z^2\, dz - bb\, dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{(zz - bb)}}$ est $=$

$\frac{-z^2dz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}\cdot z^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\left(z-\frac{bb}{z}\right)}}=\frac{-dz-bbz^{-2}dz}{\sqrt{(z-bbz^{-1})}}=\frac{-dt}{t^{\frac{1}{2}}}$, en faisant $z-bbz^{-1}=t$, ce qui donne $dz+bbz^{-2}dz=dt$, & $\sqrt{(z-bbz^{-1})}=t^{\frac{1}{2}}$; donc S. $\frac{-zzdz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz-bb)}}=$ $-2t^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{(z-bbz^{-1})}=-2\sqrt{\left(\frac{bb}{x}-x\right)}$ $=-2\sqrt{\left(\frac{bb-xx}{x}\right)}$; donc l'intégrale de la fraction proposée est $\frac{2s}{\sqrt{b}}-2\sqrt{\left(\frac{bb-xx}{x}\right)}$, plus ou moins une constante; ainsi l'intégrale de la fraction proposée dépend d'une quantité algébrique & d'un arc hyperbolique.

71. En faisant $x=\frac{bb}{z}$, on trouvera aisément que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(bb\pm px-xx)^{-\frac{1}{2}}$ est S. $\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(zz\pm pz-bb)}}-\frac{2.\sqrt{(zz\pm pz-bb)}}{\sqrt{z}}$. Or on sait par le corollaire troisième (68), que l'intégrale de la différentielle $z^{\frac{1}{2}}dz(zz\pm pz-bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $=2b$, le premier $=2a$, l'équation étant $uu=\frac{bb}{aa}(yy-aa)$, en prenant y pour l'abscisse comptée depuis le centre sur le premier axe, u pour l'ordonnée, faisant $g=\frac{bb}{aa}$, & $y=\sqrt{\left(\frac{az+aa}{g+1}\right)}$. Il suit de-là que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e étant positif h est négatif, quelque soit f positive ou négative. Car supposant $h=-c$, on aura $e+fx\pm$

$hx^2 = c\left(\frac{e}{c} + \frac{f}{c} - xx\right) = c\,(bb \pm px - xx)$ en faisant $\frac{e}{c} = bb$, $\frac{f}{c} = \pm p$; donc $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+hx)^{-\frac{1}{2}}$ $= c^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}}dx\,(bb \pm px - xx)^{-\frac{1}{2}}$; donc &c.

72. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^{-\frac{1}{2}}dx\,(bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Il est évident que $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} = \frac{bdx + xdx - xdx}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} = \frac{dx\,(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}}$ $- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{b\sqrt{(bb-xx)}}$. Or (70) l'intégrale de $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ & par conséquent celle de $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{b.\sqrt{(bb-xx)}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole & d'une quantité algébrique, mais l'intégrale de la différentielle $\frac{dx.(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}}$ se trouvera de la manière suivante : parce que $bb - xx = (b+x).(b-x)$, on aura $\frac{dx\,(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} =$ $\frac{dx\sqrt{(b+x)}}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)}}$; & en supposant $b+x = z$, l'on a $dx = dz$, $\sqrt{(b+x)} = z^{\frac{1}{2}}$, $x = z-b$, $b-x = 2b-z$, $\frac{dx\sqrt{(b+x)}}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{b.\sqrt{(3bbz-zz-2bb)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{b.\sqrt{(pz-zz-cc)}}$, en faisant $3bb = p$, & $2bb = cc$; mais par le corollaire IV (69), l'intégrale de cette dernière différentielle dépend d'un arc d'ellipse; ainsi on aura S. $\frac{dx.(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}}$ par la rectification d'un arc elliptique. Donc on aura l'intégrale de la différentielle proposée par une quantité

algébrique & par la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse ensemble.

73. COROLLAIRE I. La différentielle $x^{-\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, en faisant $x = \frac{bb}{z}$ devient $= \frac{-bbz^{-2}dz}{b.z^{-\frac{1}{2}}bz^{-1}\sqrt{(bb-zz)}} = \frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-zz)}}$, qui a la même forme que celle du problême; donc son intégrale dépend d'une quantite algébrique & de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse.

74. COROLLAIRE II. En faisant $bb = \frac{e}{c}$, & $f = -c$, l'on aura $\sqrt{(e+fxx)} = c^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}$. Faisant $e = -c$, on aura $\sqrt{(e+fxx)} = f^{\frac{1}{2}}.\left(xx-\frac{c}{f}\right) = f^{\frac{1}{2}}\sqrt{(xx-bb)}$; en faisant $bb = \frac{c}{f}$; donc l'intégrale de la formule $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(e+fxx)^{\frac{1}{2}}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, lorsque des deux quantités e & f l'une est positive, & l'autre négative.

75. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, & d'une quantité algébrique. Car en supposant $\sqrt{(xx+bb)} = y-x$, on aura $xx+bb = yy-2yx+xx$, $x = \frac{yy-bb}{2y}$, $\sqrt{(xx+bb)} = y-x = \frac{yy+bb}{2y}$, $dx = \frac{dy(yy+bb)}{2yy}$, $x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)} = \frac{yy+bb}{2y} \times \frac{\sqrt{(yy-bb)}}{\sqrt{2y}}$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)}} = \frac{dy\sqrt{2}}{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{(yy-bb)}}$;

différentielle qui, au multiplicateur $\sqrt{}$ 2 prés, a la forme de celle du corollaire premier (73); donc &c.

76. REMARQUE. L'on peut trouver l'intégrale de toutes les différentielles qui dépendent de la rectification des arcs elliptiques & hyperboliques, soit séparément ou ensemble, on peut, dis-je, trouver ces intégrales par des séries, ou par la quadrature de quelque courbe algébrique, en suivant les méthodes que nous avons enseignées ci-devant. Nous pourrions aisément ramener un plus grand nombre de différentielles aux rectifications des arcs elliptiques & hyperboliques, soit séparément ou ensemble; mais nous avons d'autres objets à considérer.

M. Maclaurin, dans son Traité des fluxions, distingue différentes classes ou ordres de différentielles. La première classe comprend celles dont les intégrales peuvent être déterminées exactement en termes finis par des expressions algébriques, ou géométriquement par des figures rectilignes. La seconde classe comprend les différentielles dont les intégrales peuvent se trouver par les tables des sinus & des logarithmes, ou par la quadrature de l'hyperbole, de l'ellipse ou du cercle. La troisième classe renferme celles dont les intégrales supposent la rectification des arcs elliptiques ou hyperboliques. On peut à ces trois classes en ajouter une infinité d'autres: par exemple, on pourroit faire une classe de toutes les différentielles qui supposeroient la rectification d'une courbe algébrique du troisième ordre qui ne seroit pas exactement rectificable comme la cissoïde.

L'illustre M. d'Alembert auquel les mathématiques doivent tant, a fait beaucoup de recherches sur les différentielles de la troisième classe, & il a ramené un très-grand nombre de formules à la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, comme on peut le voir dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746 & 1748.



DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DE TOUS LES ORDRES, ET DE CELLES QUI SONT AFFECTÉES DE SIGNES D'INTÉGRATION, EN SUPPOSANT QU'IL N'Y AIT QU'UNE VARIABLE DANS CHAQUE DIFFÉRENTIELLE, OU S'IL Y A DEUX DIFFÉRENTIELLES DANS LA MÊME FORMULE, QUE L'UNE DES DEUX SOIT CONSTANTE.

77. PROBLEME. *Intégrer l'équation différentielle* $d^m y = p\, dx^m$ *dans laquelle* dx *est constant*, p *une fonction de* x, *&* m *l'exposant de l'ordre de la différentielle*. Puisque dx est constant, on peut le désigner par une constante g, & exprimer ainsi l'équation $d^m y = g^{m-1} p\, dx$, & en prenant les intégrales de part & d'autre, on aura $d^{m-1} y = g^{m-1} S.p\, dx + C g^{m-1}$, C étant une constante arbitraire qu'on pourra déterminer par les conditions données ; donc en remettant dx au lieu de g, on aura $d^m y = dx^{m-1} S.p\, dx + C\, dx^{m-1}$ * ; mais parce que p est une fonction de x, on pourra trouver l'intégrale $S.p\, dx$ par quelqu'une des méthodes précédentes. Supposant donc $S.p\, dx = r$, fonction de x, on aura l'équation $d^{m-1} y = r dx^{m-1} + C\, dx^{m-1} = g^{m-2} r dx + C g^{m-2} dx$; & en intégrant, il viendra $d^{m-2} y = g^{m-2} S.r dx + C g^{m-2} x + D g^{m-2} = dx^{m-2} S.r dx + C x . dx^{m-2} + D\, dx^{m-2}$, D étant encore une constante arbitraire

* En différenciant cette équation on retrouvera la proposée ; car dx étant constant, la différentielle de $C\, dx^{m-1}$ sera $= 0$.

ou déterminable par des conditions données. On continuera de même à intégrer jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne aucune différentielle ; & il est aisé de voir qu'il faudra faire autant d'intégrations qu'il y a d'unités dans l'exposant m, ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I. Soit $d^2 y$, ou $d\,d\,y = a\,x^m\,d\,x^2$; en intégrant de part & d'autre, on trouve $d\,y = \frac{a\,x^{m+1}\,d\,x}{m+1} + C\,d\,x$; & par une seconde intégration, l'on a $y = \frac{a\,x^{m+2}}{(m+1).(m+2)} + Cx + D$.

EXEMPLE. II. Soit $d^3 y = ax^m\,dx^3 + bx^n\,dx^3$. La premiere intégration donnera $d\,d\,y = \frac{ax^{m+1}\,dx^2}{m+1} + \frac{b\,x^{n+1}\,d\,x^2}{n+1} + C\,dx^2$; par une seconde intégration, l'on aura $d\,y = \frac{a\,x^{m+2}\,d\,x}{(m+1).(m+2)} + \frac{b\,x^{n+2}\,d\,x}{(n+1).(n+2)} + Cx.\,dx + D\,dx$; & par une troisième intégration, il vient $y = \frac{a\,x^{m+3}}{(m+1).(m+2).(m+3)} + \frac{b\,x^{n+3}}{(n+1).(n+2).(n+3)} + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E$, E étant une constante arbitraire, ou qu'on détermine par des conditions données.

78. On peut réduire une différentielle d'un ordre quelconque de la forme $d^m y = a\,d\,x\,d^{m-1}y + p\,dx^m$ à une équation différentielle du premier ordre, $d\,x$ étant constant & p une fonction de x; car en intégrant de part & d'autre, on aura $d^{m-1}\,y = a\,d\,x\,d^{m-2}y + d\,x^{m-1}\,S.\,p\,d\,x +$

$C\,dx^{n-1}$, C étant une constante *. En intégrant une seconde fois, on trouve $d^{n-2}y = adxd^{n-3}y + dx^{n-2}.\,S.\,(dx.\,S.\,pdx)$ ** $+ C\,x\,dx^{n-2} + D.\,dx^{n-2}$. En intégrant une troisième fois, il vient $d^{n-3}y = a\,dx\,d^{n-4}y + dx^{n-3} \times S.\left(dx.\,S.(dx.S.pdx)\right) + \frac{Cx^2dx^{n-3}}{2} + D\,x\,dx^{n-3} + E\,dx^{n-3}$; & en continuant on parviendra enfin à une équation du premier ordre.

Soit, par exemple, l'équation $dddy = adxddy + pdx^3$, on aura par la premiere intégration, $ddy = adx.dy + dx^2\,S.pdx + Cdx^2$; & par la seconde intégration, $dy = a\,y\,dx + dx \times S.(dx.\,S.\,pdx) + C\,x\,dx + D\,dx = aydx + t\,dx + Cxdx + D\,dx$, en faisant $S.\,pdx = r$, & $S.\,rdx = t$.

79. THÉORÊME. *p étant tout ce qu'on voudra, si dx est constant, on aura l'intégrale* $S.\,p\,dx =$

$$px - S.\,xdp = px - \frac{x^2dp}{2dx} + S.\frac{x^2ddp}{2dx} = px - \frac{x^2dp}{2dx} + \frac{x^3ddp}{2.3.dx^2} - S.\frac{x^3d^3p}{2.3.dx^2} = px - \frac{x^2dp}{2dx} + \frac{x^3ddp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4d^3p}{2.3.4.dx^3} + S.\frac{x^4d^4p}{2.3.4.dx^3} = px \text{ \&c.}$$

On démontre ce théo-

* Cette constante peut être = o.

** Nous parlerons bien-tôt de la maniere dont on peut avoir les intégrales des quantités qui renferment des signes d'intégration.

rême en prenant les différentielles des deux membres de chaque équation, car on les trouve égales. Ainsi dans la premiere équation $S.pdx = px - S.xdp$, on trouve en différenciant, $pdx = pdx + xdp - xdp = pdx$. Dans la seconde équation, $px - S.xdp = px - \frac{x^2 dp}{2dx} + S.\frac{x^2 ddp}{2dx}$, ou $- S.xdp = - \frac{x^2 dp}{2dx} + S.\frac{x^2 ddp}{2dx}$; en différenciant de part & d'autre, & supposant dx constant, on a $- xdp = - \frac{2xdxdp}{2dx} - \frac{x^2 ddp}{2dx} + \frac{x^2 ddp}{2dx} = - xdp$; & ainsi des autres. Donc $S.pdx = px - \frac{x^2 dp}{2dx} + \frac{x^3 ddp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4 d^3 p}{2.3.4.dx^3} + \frac{x^5 d^4 p}{2.3.4.5.dx^4}$ — &c. ce qui donne la série trouvée par M. Jean Bernouilli, dans les actes de Léipsick, année 1694.

Lorsque p est une fonction de x, on délivre cette série de toute différentielle. Car soit $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = tdx$, &c. on aura $S.pdx = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - \frac{x^4 t}{2.3.4} +$ &c. $= px - S.qxdx = px - \frac{x^2 q}{2} + S.\frac{x^2 rdx}{2} = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - S.\frac{x^3 t.dx}{2.3} = px$ &c. *.

* Selon M. *Fontaine* (voyez ses Mémoires), pour avoir $S.ydx$, y étant une fonction de x, on doit

Avant

Avant de passer au théorême suivant nous remarquerons que l'on a toujours $d.uz = udz +$

multiplier $\frac{1}{2^n-1}x$ par une suite dont on trouvera le premier terme en mettant $\frac{1}{2^n}x$ au lieu de x dans la fonction y; le second terme se trouvera en substituant $\frac{3x}{2^n}$ au lieu de x dans la même fonction y; le troisième en substituant $\frac{5x}{2^n}$ au lieu de x; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui se trouvera en substituant $\frac{2^n-1}{2^n}$ au lieu de x, & cela d'autant plus exactement que n sera un plus grand nombre. Ce qu'on vient de dire de $S.ydx$ doit s'entendre également de $S.pdx$ lorsque p est une fonction de x. On voit aisément que les valeurs substituées de x forment une progression arithmétique $\div$ $\frac{1x}{2^n}$. $\frac{3x}{2^n}$. $\frac{5x}{2^n}$. $\frac{7x}{2^n}$. &c. (n est l'exposant de 2). Par exemple, si l'on suppose $p = \sqrt{(2x - x^2)}$, pdx sera l'élément de l'aire d'un demi-cercle dont le diamètre $= 2$, & le rayon $= 1$, & selon cette règle l'aire $S.pdx$ sera $=$

$$\frac{x}{2^n}.\left(\sqrt{2.\frac{x}{2^n}-\frac{x^2}{2^{2n}}}+\sqrt{2.\frac{3x}{2^n}-\left(\frac{3x}{2^n}\right)^2}+\&c.\right),$$

d'autant plus exactement que le nombre positif n sera plus grand. Si $n = 5$, & $x = 1$, le quart du cercle dont le rayon $= 1$, sera $= \frac{1}{2^9}.(\sqrt{63.1} + \sqrt{61.3} + \sqrt{59\ 5} \ldots\ldots + \sqrt{33.31})$. Pour avoir le premier terme de la suite, on fera attention qu'en supposant $x = 1$, la fraction $\frac{x}{2^n}$ devient $= \frac{1}{2^n}$; mais la quantité sous le signe du premier radical est alors $=$

$z\,du$; donc $uz = S.\,udz + S.\,zdu$. Ainsi nous aurons le lemme suivant.

LEMME. $S.\,udz = uz - S.\,zdu$.

$\frac{1}{2^{2n}}.\,2^{n+1} - \frac{1}{2^{2n}} = \frac{63}{2^{2n}} = 63.1$, en faisant passer $\frac{1}{2^{2n}}$; hors du signe. Il n'est pas difficile de voir comment on a trouvé les autres termes ; le point indique la multiplication. Si l'on vouloit l'aire entière du cercle, on multiplieroit tout par 4, quarré de 2, & pour cela il suffiroit, en laissant tout le reste, d'écrire $\frac{1}{2^7}$ au lieu de $\frac{1}{2^9}$.

Par la même règle on aura $S.\,\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2^{n-1}}\,x \times \left(\frac{1}{1+\frac{x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{5x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{7x}{2^n}} + \&c.\right) = 2x\left(\frac{1}{2^n+x} + \frac{1}{2^n+3x} + \frac{1}{2^n+5x} + \&c.\right)$. Pour déterminer la constante C qu'on doit ajoûter à ces sortes de séries, je remarque que la première série qu'on a trouvée pour le cercle devient $= 0$, lorsque $x = 0$; donc $C = 0$. Il en est de même pour la série $2x\left(\frac{1}{2^n+x} + \&c.\right)$. Donc si alors la série doit être 0, la constante sera $= 0$. Mais si par la nature de la question, on trouvoit une série $= A$, lorsque $x = 0$ doit donner une série $= 0$, l'on auroit, $A + C = 0$, ou $C = -A$. Par cette méthode l'on peut trouver par aproximation l'intégrale d'une différentielle quelconque à une seule variable.

80. THÉORÈME. *p étant une variable quelconque, on a les équations suivantes :*

I. $S.\,dx\,S.\,pdx = x\,S.\,pdx - S.\,pxdx.$

II. $S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\,pdx}} = \frac{x^2 S.pdx - 2xS.pdx + S.px^2dx}{2}.$

III. $S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\,pdx}}} =$
$\frac{x^3\,S.pdx - 3x^2\,S.pxdx + 3x.\,S.px^2\,dx - S.px^3dx}{2\,.\,3}.$

IV. $S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\overline{dx\,S.\,pdx}}}} =$
$\frac{x^4 S.pdx - 4x^3\,S.pxdx + 6x^2\,S.px^2dx - 4xS.px^3\,dx + S.px^4dx}{2\,.\,3\,.\,4}.$

& généralement, si le nombre des S. dx *qui précédent* S. $p\,dx$, *est* m, *& que* $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots m$ *désigne le produit de tous les nombres de la suite* 1, 2, 3, 4, 5 *&c. jusqu'au terme* m *de cette suite inclusivement, on aura l'équation suivante,*

$S.\overline{dx\,.\,S.\overline{dx\ldots\ldots S.\,pdx}} = [\,x^m\,S.\,pdx$
$- \frac{m}{1}x^{m-1}\,S.pxdx + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}S.px^2dx$
$- \frac{m.(m-1).(m-2)\,x^{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}.S.px^3\,dx\ldots \pm$
$S.px^m\,dx\,] : (1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\ldots\ldots m)$ *

* Les deux points indiquent une division.

le signe supérieur a lieu lorsque m est un nombre pair, & le signe — si m est impair. En prenant les différentielles des deux membres des quatre premières équations, on les trouvera égales; d'où l'on pourra conclure que la derniere équation doit avoir lieu; mais on peut démontrer le théorême de cette autre manière. On trouve la première équation $S.\,dx.\,S.\,pdx = x.\,S.\,pdx - S.\,pxdx$ par le lemme précédent, en supposant $S.\,pdx = u$ & $x = z$, ce qui donne $pdx = du$, $pxdx = zdu$, $dx = dz$, $dx.\,S.\,pdx = udz$, $uz = x\,S.\,pdx$; donc par le lemme, $S.\,udz = \overline{S.\,dx.\,S.\,pdx} = uz - S.\,zdu = x\,S.\,pdx - S.\,pxdx$. On trouve la seconde équation par la première & par le même lemme: car puisque $\overline{S.\,dx.\,S.\,pdx} = x.\,S.\,pdx - S.\,pxdx$, en multipliant de part & d'autre par dx, il vient $dx.\overline{S.\,dx.\,S.\,pdx} = xdx\,S.\,pdx - dx\,S.\,pxdx$; & en prenant les intégrales, on a $S.\overline{dx.\,\overline{S.\,dx.\,S.\,pdx}} = \overline{S.\,xdx.\,S.\,pdx} - \overline{S.\,dx.\,\overline{S.\,pxdx}}$. Or en supposant $S.\,pdx = u$, & $xdx = dz$ dans l'intégrale $\overline{S.\,xdx.\,S.\,pdx}$, on a $pdx = du$, $\frac{1}{2}x^2 = z$, $uz = \frac{1}{2}x^2\,S.\,pdx$, $zdu = \frac{1}{2}px^2\,dx$, $udz = xdx\,S.\,pdx$, & $S.\,udz = \overline{S.\,xdx.\,S.\,pdx} = uz - S.\,zdu = \frac{x^2 S.\,pdx - S.\,px^2\,dx}{2}$. En supposant $S.\,pxdx = u$, & $x = z$ dans l'intégrale $\overline{S.\,dx.\,S.\,pxdx}$, on a $pxdx = du$, $dx = dz$, $uz = x\,S.\,pxdx$, $zdu = px^2dx$, $udz =$

$x\,dx\,S.\,p\,x\,dx$, & par le lemme, $S.\,u\,dz =$ $\overline{S.dx.S.pxdx} = uz - S.z\,du = x\,S.p\,x\,dx -$ $S.p\,x^2\,dx = \frac{2\,x\,S.\,p\,x\,dx - 2\,S.\,p\,x^2\,dx}{2}$;

donc $\overline{S.x\,d\,x.\,S.\,p\,dx} - \overline{S.dx.S.p\,x\,dx} =$

$$\frac{x^2\,S.pdx - S.px^2\,dx - 2\,xS.\,pxdx + 2S.px^2dx}{2} =$$

$$\frac{x^2\,S.\,p\,dx - 2\,x\,S.\,p\,x\,dx + S.\,p\,x^2\,dx}{2}.$$

On trouve de même la troisième équation par la seconde & par le lemme ; la quatrième par la troisième & par le lemme, &c. ; Et en observant la loi de ces équations, on parvient à l'équation générale.

81. REMARQUE. Supposons que l'on a une suite de courbes MA, MB, MC, &c. (fig. 10) qui ayent une abscisse commune MP & terminées dans la même ordonnée indéfinie PF, & telles que l'aire PAM = A de la première, divisée par une ligne que je fais = 1, soit égale à l'ordonnée de la seconde, l'aire de la seconde divisée par 1 soit égale à l'ordonnée de la troisième, & ainsi de suite. Supposons encore que p fonction de x est l'ordonnée de la première courbe ; de manière cependant que $p\,dx$, différentielle de l'aire A ne soit pas intégrable. Nous appellerons la quadrature $S.\,p\,dx = A$, quadrature transcendante du premier degré, la quadrature B de la seconde courbe, transcendante du second degré, & ainsi de suite selon l'ordre des courbes ; or l'on peut réduire ces quadratures transcendantes à la rectification des courbes algébriques. Car A =

S. pdx ; & parce que $\frac{A}{1}$ eſt l'ordonnée de la ſeconde courbe, $A\,dx = dx\,S.\,pdx$ ſera la différentielle de l'aire B ; donc $B = S.\overline{dx.S.pdx}$. L'on aura de même l'aire C de la troiſième courbe $=$ S. $[dx S.(dx S.pdx)]$; &c. Mais $S.dx S.pdx = xS.pdx - S.pxdx$ & en général la quadrature tranſcendante d'une courbe du degré $m+1$ ſe réduit à cette forme $S.\overline{dx\,S.\overline{dx\;\;S.\overline{dx\ldots S.pdx}}} =$

$$\frac{x^m S.pdx - \frac{m}{1}x^{m-1}S.pxdx \ldots\ldots \pm p x^m dx}{1.2.3.4\ldots\ldots m}.$$

Il ne reſte donc qu'à réduire par les méthodes ci-deſſus (n°. 19 & ſuivans) les quadratures S. pdx, S. $pxdx$, S. px^2dx, &c. à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a de termes affectés de S, & en ſubſtituant dans la ſérie précédente, on aura la quadrature tranſcendante du degré $m+1$ réduite à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a d'unités dans $m+1$.

82. REMARQUE II. Soit $p = y$ l'ordonnée de la première courbe, l'ordonnée de la ſeconde ſera $= \frac{S.\,ydx}{1} = S.\,ydx$, &c. donc la quadrature tranſcendante de la courbe de l'ordre $m+1$ ſera $=$

$$\frac{x^m S.ydx - \frac{m}{1}x^{m-1}S.yxdx + \frac{m.(m-1).x^{m-2}}{1.2}S.yx^2dx \ldots \pm S.yx^m dx}{1.2.3.4.5\ldots\ldots m}.$$

Il n'eſt pas difficile de voir que le théorême pré-

cédent peut être utile pour l'intégration des différentielles à deux variables *.

* Il est évident qu'en supposant $p = y$, il y aura plusieurs variables; c'est-à-dire deux variables dans la différentielle de l'aire de la quadrature transcendante de la courbe de l'ordre $m + 1$; donc cette aire, qu'on peut avoir au moins par approximation, sera $= S. dx. \overline{S. dx ... S. y dx}$ & la différentielle de l'aire sera $= dx. \overline{S. dx .... S. y dx.}$

Pour avoir la surface des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne peut pas avoir autrement, supposons qu'on ait une formule différentielle $y dx$, & qu'on ait besoin de connoître l'intégrale S. $y dx$, sans avoir y exprimé en x. Pour cela on considérera les valeurs de y comme les ordonnées d'une courbe dont est x l'abscisse & y l'ordonnée, & l'on calculera arithmétiquement un grand nombre de valeurs de y, & la surface de cette courbe correspondante aux y ainsi calculés sera à peu près l'intégrale cherchée. Si les trois ordonnées P M (a), T m(b), N n(c) (Fig. 11) répondent aux abscisses A P, A T, A N, & que l'on ait P T $=$ T N $= 1$, la surface P M n N sera (en considérant l'arc M n comme une ligne droite) $= \frac{a+b}{2} + \frac{c+b}{2}$, & s'il y avoit un plus grand nombre d'ordonnées f, g &c. on auroit pour les espaces suivantes $\frac{c+f}{2} + \frac{f+g}{2}$ &c.

Mais si l'arc M m n qui joint trois ordonnées consécutives est un arc de courbe parabolique déterminé par ces trois ordonnées, voici la maniere de trouver la surface de l'espace P M n N.

Dans une courbe du genre parabolique dont l'équation est $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. Si l'on a trois ordonnées a, b, c correspondantes aux abscisses

S 4

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES À PLUSIEURS VARIABLES.

83. THÉOREME. *Si p est une fonction quelconque des variables x, y, z, u, &c. on aura la dif-*

0, 1, 2, la surface P M n N sera $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$, comme on le verra bien-tôt. Substituons pour A, B, C des fonctions de a, b, c, telles qu'en mettant zéro au lieu de x (l'origine des x est ici supposé en P) l'on ait $y = a$, que mettant 1 au lieu de x, l'on ait $y = b$, & qu'en mettant 2 au lieu de x, l'on ait $y = c$. Ces conditions seront remplies en faisant $y = a + (b - a) . x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) . x . (x - 1)$. Alors l'élément $y\,dx$ de P M n N sera $= a\,dx + (b - a) . x\,dx + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) . (xx\,dx - x\,dx)$; donc l'espace P M n N ou S. $y\,dx$ sera $= ax + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$. Si dans cette expression on fait $x = 2$, l'on aura la surface cherchée $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$. Si l'on avoit une suite d'ordonnées a, b, c, e, f, g, &c. Le segment compris entre les ordonnées c, e, f (on suppose leur distance $= 1$) seroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}e + \frac{1}{3}f$; & en général l'aire de la courbe seroit égale à un tiers de la premiere & de la dernière ordonnée, plus $\frac{4}{3}$ de la seconde & de la quatrième, &c; C'est-à-dire des termes de rang pair, $+ \frac{2}{3}$ de la troisième, de la cinquième, &c, c'est-à-dire, des termes de rang impair.

Les lettres a, b, c, &c., quand il s'agit de l'aire de la courbe désignent, après l'opération, des surfaces & non des lignes; De sorte que si l'ordonnée $a = 1$ pied,

férentielle $d p$; premièrement en faisant varier x & considérant les variables y, z, u, &c. comme constantes ; secondement en différentiant comme si y étoit variable, tout le reste étant constant, & ainsi de suite : la somme de toutes ces différentielles sera la différentielle cherchée. Par exemple, pour différencier la fonction $x y z$, je considere x seul comme variable, ce qui me donne $y z d x$, je différencie ensuite en regardant y seul comme variable & j'ai $x z d y$, & enfin je traite à son tour z comme variable pour avoir $x y d z$; & la

---

l'ordonnée $b = 2$ pieds & l'ordonnée $c = 3$ pieds, la surface désignée par $\frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{1}{3} c$ vaudra 4 pieds quarrés.

Supposons que x représente un arc de cercle & qu'on veuille avoir S. $(a - \text{cos}. x)^m dx$ lorsque $x = 90°$ degrés, on pourra supposer $dx = 2$ degrés si l'on veut, & chercher les ordonnées $(a - \text{cos}. x)^m$ d'une courbe dont x seroit l'abscisse, en supposant successivement $x = 0$, $x = 2°$, $x = 4°$. &c. jusqu'à $x = 90°$ inclusivement, ce qui donnera 46 ordonnées. On en trouvera tout autant pour le second quart de cercle. On ajoutera ensemble le tiers de la première & de la dernière, &c. comme on vient de l'expliquer & l'on aura la valeur du moins approchée de S. $(a - \text{cos}. x)^m dx$. Supposons $m = 2$, $a = 3$ & le rayon $= 1$, on cherchera, par le moyen des tables, les valeurs de cos. x, dans la supposition de $x = 0$, de $x = 2°$, &c. Retranchant successivement ces valeurs de $a = 3$, & prenant le quarré du reste, on aura toutes les ordonnées nécessaires pour avoir par approximation la valeur de l'intégrale dont on vient de parler. Si on avoit calculé les ordonnées de degré en degré, on auroit fait le premier $x = 1°$; Mais $(a - \text{cos}. x)^m dx$ auroit toujours été l'élément de l'aire de la courbe dont la surface doit donner l'intégrale de la formule proposée.

différentielle entiere est $= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$. Ce qu'on trouveroit de même en différentiant à l'ordinaire; ce théorême ne paroit pas avoir besoin de démonstration.

84. COROLLAIRE. Si p ne contient que deux variables x & y, qu'on ait, par exemple, $p = axy$, la différentielle dp pourra être représentée par $A\,dx + B\,dy$. Dans la supposition dont on vient de parler A est $= ay$, & B est $= ax$, A étant une quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de x seul variable, & B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de y seul variable. Si p contient trois variables x, y, z, l'on pourra représenter dp par $A\,dx + B\,dy + D\,dz$, A étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de x variable, B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de y variable, D étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la supposition de z variable; & ainsi de suite. Si on suppose $p = xyz$, l'on aura $A = yz$, $B = xz$, $D = xy$.

85. Lorsque la différentielle dp a un intégrale, on peut la trouver en intégrant dans son expression $A\,dx + B\,dy + D\,dz +$ &c. 1°. Le terme $A\,dx$, en regardant x seul comme variable, 2°. Le terme $B\,dy$ en regardant y seul comme variable, & ainsi de suite, jusqu'au dernier terme *, & en comparant toutes ces intégrales; car si elles sont toutes les mêmes, on aura dans la premiere S. $A\,dx$ l'intégrale cherchée. Si elles sont

* Cela doit s'entendre toujours en ajoutant une constante.

différentes, on ajoutera à ce qu'elles ont de commun, tous les termes qui font leurs différences pour avoir l'intégrale p, à laquelle on ajoutera une constante C. Voici la raison de ce procédé : puisqu'on a trouvé le premier terme $A\,dx$ en différentiant dans la supposition que x seul étoit variable, en intégrant $A\,dx$ dans la même supposition, on aura une intégrale S. $A\,dx$ qui rendra p dans la même supposition. Mais parce que p peut contenir des termes dans lesquels x ne se trouve pas & que tous ces termes s'évanouissent lorsqu'on différencie dans la supposition de x seul variable, on ne retrouvera pas ces termes dans l'intégrale S. $A\,dx$, mais on les trouvera dans les autres intégrales S. $B\,dy$, S. $D\,dz$, &c. dont les différentielles ont été trouvées en supposant que y, z, &c. étoient variables successivement : car Bdy étant la différentielle de p dans la supposition de y variable, les termes de p dans lesquels se trouve y n'ont pas été détruits par la différenciation de p qui a donné $B\,dy$; on les trouvera donc dans l'intégrale S. Bdy, & ainsi des autres.

Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy = 3y^2x^2\,dx + 2ayx\,dx + b\,dx + 2yx^3\,dy + ax^2\,dy + 2cy\,dy$. L'on aura $A = 3y^2x^2 + 2ayx + b$, $B = 2yx^3 + ax^2 + 2cy$. En intégrant $A\,dx$ dans la supposition de x seul variable, on a S. $A\,dx = y^2x^3 + ayx^2 + bx$; & en intégrant $B\,dy$ dans la supposition de x constant & de y variable, on trouve S. $B\,dy = y^2x^3 + ax^2y + cy^2$. En comparant ces intégrales on trouve que leurs termes communs sont

$y^2x^3 + ax^2y$, & que leurs termes différens font cy^2 & bx. Ajoutant les termes communs avec les termes différens, l'on aura l'intégrale cherchée $y^2x^3 + ax^2y + bx + cy^2 + C$, en ajoutant une conſtante C.

86. REMARQUE. I. On voit par-là qu'en ſuivant cette méthode on integre à chaque fois comme s'il n'y avoit qu'une variable, & que cette opération ſe réduit à l'intégration d'une formule différentielle qui ne renfermeroit qu'une variable.

REMARQUE II. Si l'on avoit une formule $ax^2\,dx + by^m\,dy + cz^{-1}\,dz$, pourvu que chaque terme ne renfermât qu'une ſeule variable, on en auroit l'intégrale $\frac{ax^3}{3} + \frac{by^{m+1}}{m+1} + c\,\text{L}.z$, en prenant celle de chacun de ſes termes. Si on a la formule $z^n y^m dx$, on pourra l'intégrer facilement lorſque le facteur différentiel $y^m dx$ ſera à $z^p dz$ en raiſon donnée de $b:a$, quelque ſoit l'expoſant p. Car on aura $a:b :: z^p dz : y^m dx = \frac{bz^p dz}{a}$; donc la différentielle $z^n y^m dx$ ſera $= \frac{bz^{p+n}dz}{a}$; dont l'intégrale eſt $= \frac{bz^{p+n+1}}{a(p+n+1)}$, excepté le cas où $p + n = -1$: car alors l'intégrale eſt $= \frac{b}{a}\text{L}.z$.

87. THÉOREME. *Si* P *eſt une fonction quelconque compoſée de deux variables* x, y *& de conſtantes, & que par conſéquent* dP *ſoit* $=$ A dx + B dy, *la différentielle de* A dx *priſe dans la ſuppoſition de* x

conſtant & de y variable, ſera égale à la différentielle de B $d\,y$ priſe on ſuppoſant y conſtant & x variable. Si dans la fonction P on ſubſtitue $x + d\,x$ au lieu de x, $y + d\,y$ au lieu de y, & que par ces ſubſtitutions P devienne P$'$, on aura d P $=$ P$'$ — P $=$ A $d\,x$ + B $d\,y$. Si dans la fonction P on ſubſtitue ſeulement $x + d\,x$ au lieu de x, en conſidérant y comme conſtant, & que par cette ſubſtitution P devienne T ; en ſubſtituant enſuite dans T, $y + d\,y$ au lieu de y, T deviendra P$'$: puiſque c'eſt la même choſe de ſubſtituer en même tems dans P les deux quantités $x + d\,x$ au lieu de x & $y + d\,y$ au lieu de y, ou de ſubſtituer d'abord dans P la quantité $x + d\,x$ au lieu de x pour changer P en T & de ſubſtituer enſuite dans T, $y + d\,y$ au lieu de y. Par la même raiſon ſi on ſubſtitue d'abord dans P la quantité $y + d\,y$ au lieu de y pour changer P en t ; en ſubſtituant enſuite dans t, la quantité $x + d\,x$ au lieu de x, l'on changera t en P$'$.

Donc ſi on différentie P en ſuppoſant x variable & y conſtant, la différentielle ſera T — P $=$ A $d\,x$, & ſi l'on différentie P en ſuppoſant x conſtant & y variable, la différentielle ſera $=$ t — P $=$ B $d\,y$. Mais parce qu'en ſubſtituant $y + dy$ au lieu de y dans P & T, T devient P$'$ & P devient t, & que par conſéquent T — P devient P$'$ — t, la différentielle de T — P, ou de A $d\,x$, eſt P$'$ — t — T + P, en retranchant T — P de P$'$ — t.

De même puiſqu'en ſubſtituant dans P la quantité $y + d\,y$ au lieu de y, P devient t, & t — P devient Bdy, & qu'en ſubſtituant dans t & dans P la quantité $x + d\,x$ au lieu de x, t devient P$'$ & P devient T, & que par conſéquent t —P devient P$'$

— T, la différentielle de B dy, ou de t — P, sera, en supposant x constant & y variable, sera, disj-e, $= P' - T - t + P = A\,dx$; donc, &c.

88. COROLLAIRE I. Donc la différentielle $d\,(A.dx)$ prise en supposant dx constante & y variable est égale à la différentielle $d\,(B.dy)$ prise en supposant seulement x variable; donc $dA.\,dx = dB.\,dy$, ou $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; c'est-à-dire, qu'une différentielle $A\,dx + B\,dy$ ne peut être intégrable & donner une intégrale finie P, si en prenant la différentielle de A en faisant varier y & divisant cette différentielle par dy, le quotient n'est pas égal à la différentielle de B prise en faisant varier x & divisant par dx.

89. COROLLAIRE II. Si P est une fonction de trois variables x, y & z, & que par conséquent l'on ait $dP = A\,dx + B\,dy + C\,dz$; on aura les trois équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, en prenant la différentielle du numérateur de chaque fraction, dans la supposition que l'on fait varier, la seule variable qui se trouve au dénominateur. Car puisque $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ est la différentielle de P, fonction des variables x, y & z, si on suppose z constant, le dernier terme s'évanouira & la différentielle dP sera $= A\,dx + B\,dy$, & l'on aura (88) $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Si on suppose y constant, B dy s'évanouira & l'on aura $dP =$

A dx + C dz ; donc $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$. Si on suppose x constant, l'on trouvera dP = B dy + C dz ; donc $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; donc si la différentielle A dx + B dy + C dz, ne donne pas les trois équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, cette différentielle n'aura pas d'intégrale finie P. Si l'on a A dx + B dy + C z + D t, pour que cette différentielle ait une intégrale finie, il est nécessaire que l'on ait les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dt} = \frac{(dD)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, $\frac{(dB)}{dt} = \frac{(dD)}{dy}$, $\frac{(dC)}{dt} = \frac{(dD)}{dz}$; & ainsi de suite pour un nombre quelconque de variables. On doit donc avoir autant d'équations qu'il y a de manières réellement différentes de combiner les lettres A, B, C, D, &c. deux a deux *. (On peut consulter le Traité des Combinaisons dans nos Institutions Mathématiques, derniere édition).

* Pour trouver ces combinaisons il n'y a d'abord, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, qu'à comparer le premier coefficient à tous les autres, chercher ensuite les équations que donne le second coefficient comparé à tous ceux qui le suivent ; on cherchera de même les équations que donne le troisième comparé avec tous ceux qui le suivent, & ainsi de suite, & l'on aura facilement toutes les équations qu'on cherche. Voyez ce que nous avons dit dans notre algèbre lemme 11. N°. 39.

90. LEMME. *Supposant que* A *est une fonction de* y *& de* x *& qu'on ait trouvé l'intégrale* S. A dx *en considérant* x *seul comme variable, si on différencie cette intégrale en faisant varier* y *seulement, la différentielle* d. S. A dx *sera* $= dy \, S. \frac{(dA)dx}{dy}$. l'expression ($d$ A) signifie qu'on prend la différentielle de A en faisant varier seulement y dont la différentielle se trouve au dénominateur. Soit P une fonction de y & de x, l'on aura $dP = A\,dx + B\,dy$, & $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ (88); donc $dB = \frac{(dA)}{dy}.dx$, & en intégrant dans la supposition de x seul variable, on aura $B = S. \frac{dA}{dy}.\,dx$, & $B\,dy = dy\,S.\frac{dA}{dy}.\,dx$; donc la différentielle totale $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.S.\frac{dA}{dy}.dx$; mais S. A dx étant l'intégrale P, l'on aura d (S. A dx) $= B\,dy$, en faisant varier y seul dans S. A dx. Soit $P = ax^2y^3$, l'on aura $dP = 2ay^3xdx + 3ax^2y^2dy = A\,dx + B\,dy$; donc $A = 2ay^3x$, $B = 3ax^2y^2$, $dA = 6ay^2x\,dy$; en faisant varier seulement y, $\frac{(dA)}{dy} = 6ay^2x$; ainsi l'on aura $S.\frac{(dA)}{dy}.\,dx = 3ay^2x^2$ (en intégrant dans la supposition de y constant); & $dy.\,S.\frac{(dA)}{dy}.\,dx = 3ax^2y^2dy = B\,dy$.

On

On appelle *differentielles complettes* celles qui sont intégrables dans l'état où elles sont.

91. THÉORÊME. *Si une différentielle ne donne pas les équations dont on a parlé ci-dessus, elle n'est pas complette; mais on peut l'intégrer, si elle les donne.* La première partie du théorême suit de ce qu'on a dit ci-dessus, la seconde partie suit du lemme. Car supposons la différentielle $dP =$ $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.\,S.\,\frac{A}{dy}.\,dx$ (Par le lemme précédent); l'intégrale P sera $= S.\,A\,dx$ en regardant x seul comme variable; or on peut évidemment avoir l'intégrale de $A\,dx$ en supposant que A est une fonction de constantes, ou qu'elle ne contient d'autres variables que x. Si on trouvoit plus de facilité à prendre l'intégrale de $dy\,\frac{S.A}{dy}.\,dx$, on pourroit la prendre, cela reviendroit au même. Soit $dP = A\,dx + B\,dy = 2axy\,dx + 2ax^2\,dy$, l'on aura $S\ A\,dx = ax^2y$, en regardant y comme constant; l'on aura de même $S.\,Bdy = S.\,dy\,S.\,\frac{dA}{dy}.\,dx = ax^2y$, en regardant dans $S.\,\frac{dA}{dy}.\,dx$, x seul comme variable & regardant dans la seconde intégration y seul comme variable. Si l'on avoit la différentielle $dP =$ $A\,dx + B\,dy + C\,dz$, elle seroit complette si l'on avoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} =$ $\frac{(dC)}{dy}$: car il suit du lemme qu'en prenant convenablement les différentielles, l'on auroit $d\,S.\,dA.\,dx$

$= B\,dy$, $d\,S.\,d\,A\,dx = C\,dz$, $d\,S.\,d\,B\,dy = C\,dz$; donc $S.\,d\,A.\,dx = P$, en regardant dans A, x seul comme variable & ainsi de même pour un plus grand nombre de variables.

92. REMARQUE I. Le lemme précédent suppose que l'intégrale P de la différentielle $A\,dx + B\,dy$ est une fonction de x & de y mêlés ensemble dans tous les termes de P, & que par conséquent il y a plusieurs variables dans tous les termes de dP *: car si l'on suppose $P = ax^2y + by^2$, l'on aura $A = 2\,axy$, & $B = ax^2 + 2\,b\,y$; or l'on a $S.\,A\,dx = S.\,2\,axy.\,dx = ax^2y$, & $d.S.\,A\,dx = axx\,dy$, en regardant dans $S.\,A\,dx$, y comme constant & dans $d.\,S.\,A\,dx$, y seul comme variable; donc on auroit $ax^2\,dy = B\,dy$ & $ax^2 = ax^2 + 2\,by$, ce qui est absurde; ainsi quand dans une différentielle il y aura un terme tel que $2\,bydy$ qui ne contiendra qu'une variable, on peut l'intégrer à part comme ne faisant point partie de la différentielle; autrement l'on ne peut avoir $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.S.\frac{d\,A}{dy}.\,dx$. S'il y a trois termes dans la différentielle $d\,P = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, il faut pour que la démonstration du théorême ait lieu, que chaque terme contienne les trois variables x, y, z. Si outre ces termes il en avoit un qui ne contînt qu'une seule variable, on l'intégreroit comme ne faisant pas partie de la différentielle; & si outre les trois termes dont on vient de parler, il y en avoit deux

* Sous le nom de variables on comprend les différentielles dy, dx.

qui renfermassent chacun les mêmes deux variables x & v, par exemple, on les intégreroit à part (comme ne faisant pas partie de la différentielle), si l'on avoit, à l'égard de ces termes, l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, sans quoi ils ne seroient point intégrables. Mais de quelle manière que la chose arrive, si on ne veut pas faire toutes ces attentions, on peut se contenter de voir si la différentielle proposée satisfait aux équations du n°. 88 & 89 : car alors elle sera complette.

93. PROBLÊME. *Etant donnée une différentielle du premier ordre à tant de variables qu'on voudra, trouver si elle est complette ou exacte, & l'intégrer lorsque cela arrive.* On cherchera si la différentielle fournit toutes les équations qui doivent avoir lieu selon les corollaires ci dessus (88 & 8) ; si elle ne donne pas ces équations, elle n'est pas complette, & on l'abandonnera ; si elle les donne, on trouvera son intégrale ou exacte, ou dépendante des quadratures par la méthode suivante, qui revient à celle du n°. 85. Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c., qu'on suppose complette ; on prendra l'intégrale S. $A\,dx$ en supposant x seul variable, on prendra de même l'intégrale S. $B\,dy$ en regardant y seul comme variable, on rejettera de cette intégrale tous les termes qui se trouvent déja dans S. $A\,dx$, & on ajoutera le reste R à l'intégrale S. $A\,dx$. On prendra S. $C\,dz$ en considérant z seul comme variable & l'on ajoutera à S. $A\,dx +$ R tous les termes de S. $C\,dz$ qui ne se trouvoient pas déja dans cette première quantité, pour avoir S. $A\,dx +$ R $+$ R'. On pren-

dra S. D. du en considérant u seul comme variable, & rejettant tous les termes qui se trouvent dans S. $A\,dx + R + R'$, on ajoutera à cette intégrale le reste R'', & l'intégrale exacte, en ne supposant que quatre variables, sera $=$ S. $Adx + R + R' + R''$, à laquelle on ajoutera une constante ; on continueroit de même s'il y avoit plus de quatre variables. On s'assurera qu'on ne s'est pas trompé en prenant la différentielle de l'intégrale trouvée, qui doit être égale à la différentielle proposée.

II. MÉTHODE. On prend d'abord l'intégrale S. Adx, comme on vient de le dire, on différencie S. $A\,dx$ en supposant y seul variable, on retranche cette différentielle du terme $B\,dy$, & s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste, dans la même supposition de y seul variable, & désignant cette intégrale par R, on l'ajoute à S. $A\,dx$ pour avoir S. $A\,dx + R$. On différencie ensuite S. $A\,dx + R$ dans la supposition de z seul variable, on ôte la différentielle du terme Cdz, & s'il y a un reste, on en prend son intégrale R', & l'ajoutant à la précédente, l'on a S. $A\,dx + R + R'$; on continue de même jusqu'au dernier terme, & l'on ajoute une constante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle dy. L. $x + \frac{y\,dx}{x} + \frac{bb\,dx}{bb + xx} = A\,dx + B\,dy$; en faisant $A = \frac{y}{x} + \frac{bb}{bb + xx}$, & $B =$ L. x, on trouve que l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ a lieu ; Ainsi la diffé-

rentielle eſt complette. En me ſervant de la première méthode, j'ai $S.Adx = yLx + S.\frac{bbdx}{bb+xx} = yL.x + m$, m étant un arc de cercle dont le rayon $= b$, & la tangente $= x$. L'intégrale $S.Bdy$ priſe dans la ſuppoſition de x conſtant, eſt $y\,L.x$, que je rejette par ce qu'elle ſe trouve dans $S.Adx$. Donc l'intégrale cherchée eſt $y\,L.x + m$, plus une conſtante. On trouve la même choſe par la ſeconde méthode.

EXEMPLE II. Soit la différentielle $\frac{zydx + xzdv + 3av^2z^1dy - xydz}{zz} = Adx + Bdy + Cdz$. En faiſant $A = \frac{y}{z}$; $B = \frac{x}{z} + 3ay^2$ & $C = -\frac{xy}{zz}$, l'on a les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = \frac{1}{z}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} = -\frac{y}{zz}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy} = -\frac{x}{zz}$; donc la différentielle eſt complette. Je me ſers de la ſeconde méthode. J'ai d'abord $S.Adx = \frac{xy}{z}$: différentiant cette quantité en ne faiſant varier que y, il vient $\frac{xdy}{z}$ qu'on retranchera de Bdy, ou de $\frac{xdy}{z} + 3ay^2dy$; il reſte $3ay^2dy$, dont l'intégrale $= ay^3$, qu'on ajoute à la première intégrale trouvée $S.Adx = \frac{xy}{z}$, la ſomme eſt

$\frac{xy}{z} + ay$ (D), différentiant cette somme dans la supposition de z seul variable, on a $-xyz^{-2}dz = -\frac{xydz}{zz}$, que je retranche de C dz, & comme il ne reste rien, je ne puis pas en prendre l'intégrale pour l'ajouter à l'intégrale D; donc $\frac{xy}{z} + ay^2$ est l'intégrale cherchée. On trouveroit la même intégrale par la première méthode.

EXEMPLE III. On propose la différentielle $azdx + 3xxdx + bzdy + 2cydy + axdz + bydz + u^2dz + 2zudu + 3u^2du = Adx + Bdy + Cdz + Ddu$. En faisant $az + 3x^2 = A$, $bz + 2cy = B$, $ax + by + u^2 = C$, $2zu + 3u^2 = D$, L'on a les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = o$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} = a$, $\frac{(dA)}{du} = \frac{(dD)}{dx} = o$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy} = b$, $\frac{(dB)}{du} = \frac{(dD)}{dy} = o$, $\frac{(dC)}{du} = \frac{(dD)}{dz} = 2u$; donc la différentielle proposée est exacte. Je me sers encore de la seconde méthode, & j'ai S. $Adx = azx + x^3$, dont la différentielle, en faisant varier y seul, est $= o$. Retranchant o de Bdy, il reste Bdy, dont l'intégrale en supposant y seul variable, est $= bzy + cy^2$. L'ajoutant à la première intégrale qu'on vient de trouver, il vient $azx + x^3 + bzy + cy^2$. Différentiant cette quantité en ne faisant varier que z, l'on a $axdz + bydz$;

cette quantité étant retranchée de Cdz, il restera u^2dz, dont l'intégrale en considérant z seul comme variable, est $u^2 z$, qu'on ajoutera à la somme déja trouvée, pour avoir $azx + x^3 + bzy + cyy + uuz$. Différentiant cette somme en supposant u seul variable, il vient $2zudu$ qu'on retranchera de Ddu, il restera $3u^2 du$ dont l'intégrale u^3 étant ajoutée à la seconde somme, donne l'intégrale cherchée $= azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2 z + u^3$, à laquelle il faut supposer qu'on a ajouté une constante. On doit toujours supposer qu'on ajoute une constante à chaque intégrale ainsi que nous l'avons dit ailleurs. On trouveroit la même chose par la première méthode, & l'on pourra employer l'une ou l'autre selon qu'on le trouvera plus facile.

94. Dans la suite nous appellerons équation différentielle une formule différentielle égalée à o; Cependant nous la désignerons souvent par le mot d'équation. Lorsque la quantité qu'on différencie est égalée à o, la différenciation peut en faire disparoître quelque facteur mêlé de variables qui multiplie, ou qui divise tous les termes de l'équation différentielle. Par exemple, si on différencie la quantité $ax^2 - bx^2y + c$, l'on aura la différentielle $2axdx - 2byxdx - bx^2dy$. Mais si l'on suppose $ax^2 - bx^2y + c = 0$, l'on aura l'équation différentielle $2axdx - 2byxdx - bxxdy = 0$, laquelle étant divisée par le facteur commun & variable x, se réduit à $2adx - 2bydx - bxdy = 0$. De même en égalant à o la fonction différentielle

$\frac{axydx + by^2dx - cxy^3dy}{xx+yy}$, & divisant par le facteur $\frac{y}{xx+yy}$, l'on a l'équation différentielle $axdx + bydx - cxy^2dy = 0$. La formule $dz - zndx - mdu$, dans laquelle n & m sont des quantités constantes ou variables, étant égalée à o, & divisée par $e^{S.ndx}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, donnera $dz.e^{-S.ndx} - zndxe^{-S.ndx} - e^{-S.ndx} \times mdu$, dont l'intégrale est $ze^{-S.ndx} - S.e^{-S.ndx}.mdu = 0$; car en différenciant cette intégrale, multipliant ensuite par $e^{S.ndx}$, on a la différentielle proposée. Nous n'avons pas ajoûté de constante dans l'intégrale, le Lecteur doit y suppléer. Ainsi l'on a $z = e^{S.ndx}.\ S.\ e^{-S.ndx}.mdu + C$, C étant une constante.

95. Il est évident qu'on peut par les méthodes du problême précédent intégrer une équation différentielle quelconque du premier ordre $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. $= 0$, lorsqu'elle fournit les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, &c. Mais si la différentielle $Adx + Bdy +$ &c., étant considérée comme n'étant pas $= 0$, ne donne pas ces équations, on ne doit pas conclure qu'elle n'est pas intégrable lorsqu'on la considere comme $= 0$: car (94) il pourroit se faire qu'elle eût perdu un facteur variable que

nous désignerons par P ; de sorte que si on retrouvoit ce facteur P, en multipliant l'équation différentielle par P, on lui donneroit la forme $PAdx + PBdy + PCdz + PCdu + \&c. = 0$, qu'elle avoit avant la division, ce qui la rendroit complette, & elle donneroit les équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, &c. *, qui sont nécessaires pour qu'elle soit complette. De même il peut se faire que l'équation différentielle $Adx + Bdy = 0$ ne donne point l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, quoiqu'en la multipliant par un facteur convenable, il soit possible de la rendre intégrable. Soit $Adx + Bdy = ax^{m-1}y^n dx + bx^m y^{n-1}dy = 0$, il est évident que cette équation différentielle ne donne pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Mais si on multiplie tous ses termes par le facteur $\frac{1}{x^m y^n}$, elle donnera ensuite cette équation & sera par conséquent intégrable ; car on aura $a\frac{dx}{x} + \frac{bdy}{y} = 0$, ou $aL.x + bL.y = C$ (C est une constante) $= L.x^a y^b$.

* On doit faire attention que l'expression $\frac{d(PA)}{dy}$ signifie qu'on prend la différentielle du numérateur en faisant varier seulement la variable dont la différentielle se trouve au dénominateur, & qu'on divise ensuite la différentielle du numérateur par le dénominateur. Il en est de même pour les autres expressions de cette nature.

96. REMARQUE. Dès qu'on a trouvé un facteur P qui rend intégrable une équation différentielle, on peut en trouver une infinité d'autres PV qui auront la même propriété, en prenant pour V dans ces facteurs une fonction quelconque de l'intégrale S. P(Adx+Bdy). Dans l'exemple précédent, en faisant $V = x^a y^b$, le facteur $\frac{x^a y^b}{x^m y^n}$, aura cette propriété. Si l'on fait V $= x^{ar} y^{bs}$, le facteur $\frac{x^{ar}\, y^{bs}}{x^m\, y^n} = x^{ar-m} y^{bs-n}$ aura encore la même propriété; or l'on peut donner à r & s une infinité de valeurs successives; donc &c. de même on peut aussi prendre pour un autre facteur le produit de P par une constante arbitraire.

97. Soit l'équation différentielle $2adx - 2bydx - bxdy = 0$, ou $Adx + Bdy = 0$, en faisant $2a - 2by = A$ & $B = -bx$; donc l'on a $\frac{(dA)}{dy} = -2b$, & $\frac{(dB)}{dx} = -b$; ainsi la différentielle $Adx + Bdy$ n'est pas exacte.

On ne doit pas conclure cependant qu'en multipliant l'équation différentielle proposée par un multiplicateur P, on ne puisse pas la rendre intégrable.

Ayant fait la multiplication par le facteur P, on aura $PAdx + PBdy = 0$, & en supposant que cette équation différentielle est complette, il viendra $\frac{(d.PA)}{dy} = \frac{(d.PB)}{dx}$, ou

$$\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} - \frac{B(dP)}{dx}$$

$= 0$ *, équation que j'appellerai (R), & qui sera d'une grande utilité pour déterminer P : car la difficulté est réduite à prendre pour P une fonction de x, & de y assez générale, avec des coëfficiens & des exposans indéterminés, pour que cette fonction fasse évanouir tous les termes homologues de l'équation qu'on vient de trouver, & fournisse des équations particulières pour déterminer les coëfficiens & les exposans indéterminés.

Prenons pour P dans l'équation différentielle proposée, la fonction $x^m y^n$, m & n étant des exposans indéterminés, nous aurons $\frac{(dP)}{dy} = n x^m y^{n-1}$, $\frac{(dP)}{dx} = m y^n x^{m-1}$, $\frac{P(dA)}{dy} = -2bx^m y^n$, & $\frac{B(dP)}{dx} = -bmy^n x^m$. Donc l'équation R deviendra $-2bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} - 2bnx^m y^n + bx^m y^n + bmy^n x^m = 0$, ou $-bx^m y^n - 2bnx^m y^n + bmx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$. En égalant à 0 les termes homologues, on

* On peut donner à cette équation une autre forme plus simple : car en divisant les deux termes de l'équation proposée par le multiplicateur de dy, ce qui est toujours aisé, on aura $B = 1$ & $dB = 0$; donc en effaçant le troisième terme, substituant 1, au lieu de B ; & transposant, on trouvera $P. \frac{(dA)}{dy} = \frac{(dP)}{dx} - \frac{A(dP)}{dy}$.

on aura les équations $-b-2bn+bm=0$, & $2anx^m y^{n-1}=0$. Donc $2an=0$, ou $n=0$. Ainsi l'équation $-b-2bn+bm=0$, devient $-b+bm=0$, ou $bm=b$, ou $m=1$. C'est pourquoi le facteur $P=x^m y^n$ est $=xy^0=x$, & l'équation différentielle complette sera $2axdx-2byxdx-bx^2dy=0$. Et parce que o est la différentielle d'une constante C, (laquelle peut aussi être $=0$), l'on aura en intégrant, $ax^2-bx^2y=C$. Si l'on n'ajoute pas de constante, il faut toujours la supposer.

Si l'on avoit l'équation différentielle $bydx+cxdy=0$, qui n'est pas complette, on trouveroit par un calcul semblable, que $P=x^m y^n=\frac{1}{xy}$, & l'équation différentielle complette feroit $\frac{bydx+cxdy}{xy}=0$, ou $\frac{bdx}{x}+\frac{cdy}{y}=0$, dont l'intégrale est $bL.x+cL.y=L.x^b y^c$.

98. Soit l'équation différentielle à trois variables $Adx+Bdy+Cdz=0$, dans laquelle la fonction différentielle $Adx+Bdy+Cdz$ ne soit pas une différentielle complette, & qu'on veuille la rendre intégrable en la multipliant par un facteur P. Supposant la chose faite, la différentielle $PAdx+PBdy+PCdz$, sera complette; donc on aura les trois équations $\frac{(d.PA)}{dy}=\frac{(d.PB)}{dx}$, $\frac{(d.PA)}{dz}=\frac{(d.PC)}{dx}$,

$\frac{(d.PB)}{dz} = \frac{(d.PC)}{dy}$, ou les trois ſuivantes :

$$\text{I. } \frac{A(dP)}{dy} + \frac{P(dA)}{dy} = \frac{B(dP)}{dx} + \frac{P(dB)}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{A(dP)}{dz} + \frac{P(dA)}{dz} = \frac{C(dP)}{dx} + \frac{P(dC)}{dx}$$

$$\text{III. } \frac{B(dP)}{dz} + \frac{P(dB)}{dz} = \frac{C(dP)}{dy} + \frac{P(dC)}{dy}$$

La premiere donne $\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{Adx} + \frac{P(dB)}{Adx} - \frac{P(dA)}{Ady}$. Par la troiſième l'on a $\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{Cdz} + \frac{P(dB)}{Cdz} - \frac{P(dC)}{Cdy}$. En égalant ces deux valeurs de $\frac{(dP)}{dy}$, multipliant enſuite par A & par C, l'on trouvera facilement l'équation $\frac{CB(dP)}{dx} + \frac{CP(dB)}{dx} - \frac{CP(dA)}{dy} = \frac{AB(dP)}{dz} + \frac{AP(dB)}{dz} - \frac{AP(dC)}{dy}$.

La ſeconde équation donne $\frac{(dP)}{dx} = \frac{A(dP)}{Cdz} + \frac{P(dA)}{Cdz} - \frac{P(dC)}{Cdx}$. Subſtituant cette valeur de $\frac{(dP)}{dx}$ dans l'équation précédente, l'on trouve, après avoir retranché de part & d'autre la quantité $\frac{AB(dP)}{dz}$, diviſé le tout par P, & tranſpoſé,

l'équation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0$, qui fait connoître la relation que les quantités A, B, C doivent avoir entr'elles, afin que la proposée soit intégrable ; de maniere que si cette équation n'a pas lieu ; il n'y a aucun facteur qui puisse rendre la proposée intégrable. On voit par-là qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables, qu'il est impossible d'intégrer.

Ainsi étant proposée une équation différentielle à trois variables, on verra si elle est complette, c'est-à-dire, si elle donne les équations dont on a parlé ci-dessus (89), dans ce cas on l'intégrera par l'une des méthodes du problême précédent. Si elle ne les donne pas, on examinera si elle donne l'équation de condition dont on vient de parler. Si cette équation a lieu, on cherchera le facteur P par la méthode des indéterminés ; c'est-à-dire en prenant pour P une fonction des variables x, y & z, avec des exposans & des coefficiens indéterminés, comme on le dira bien-tôt. Si l'équation de condition n'a pas lieu, on abandonnera la proposée comme impossible.

REMARQUE. Si $C = 0$; c'est-à-dire, si la proposée ne contient que deux variables x & y, alors $dC = 0$: car on peut considérer 0 comme une constante ; & l'équation de condition devient $0 = 0$, équation identique qui (Iere Partie Calcul, N°. 67) fait voir que c'est un théorême & non un problême ; c'est-à-dire, qu'une équation différentielle

à deux variables peut toujours devenir intégrable par le moyen d'un facteur.

99. En général étant donnée une équation différentielle $Adx + Bdy + Cdz + Ddu$ &c. à tant de variables qu'on voudra, on examinera si elle est exacte, dans ce cas on l'intégrera par le dernier problême. Si elle n'est pas exacte, pour savoir si elle peut le devenir par la multiplication d'un facteur variable P, on supposera la chose faite, & que $PAdx + PBdy + PCdz + PDdu +$ &c. est une différentielle exacte. Il est évident, par ce qu'on vient de dire (98), que toutes les différentielles de trois termes, telles que $PAdx + PBdy + PCdz$, $PAdx + PBdy + PDdu$, $PBdy + PCdz + PDdu$, &c. * qu'on peut former en prenant trois termes quelconques dans l'équation proposée, & les multipliant par P, seront des différentielles complettes pourvu qu'on regarde comme constantes toutes les variables dont les différences ne se trouvent pas dans les trois termes ; donc on aura autant d'équations de condition semblables à celle dont on vient de parler (98), qu'il y a de manières de prendre les lettres A, B, C, D, &c. trois à trois.

* Le nombre de ces combinaisons pour un nombre m de lettres est égal au coefficient $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ du quatrieme terme du binome de Newton. Voyez ce que nous avons dit sur le binome de Newton dans la premiere partie de cet ouvrage, & notre Traité des Combinaisons dans nos Institutions Mathématiques.

Si la proposée ne donne pas toutes ces équations, il n'y a aucun facteur qui la puisse rendre intégrable, & on doit l'abandonner. Si la proposée donne toutes les équations de condition, on cherchera P par la méthode dont nous parlerons dans la suite.

100. Il est inutile d'examiner si toutes les équations de condition telles que $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$, ont lieu; parce que quelques-unes de ces équations suivent nécessairement des autres. Soit l'équation différentielle à quatre variables $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du = 0$, qui par la combinaison des lettres A, B, C, D donne les quatre équations de condition suivantes.

La première $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0$, qui vient de l'équation $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$.

La seconde $\frac{B(dD)}{dx} - \frac{D(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{du} - \frac{B(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dy} - \frac{A(dD)}{dy} = 0$, qu'on tire de l'équation $A\,dx + B\,dy + D\,du = 0$.

La troisième $\frac{C(dD)}{dx} - \frac{D(dC)}{dx} + \frac{A(dC)}{du} - \frac{C(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dz} - \frac{A(dD)}{dz} = 0$, qui vient de l'équation $A\,dx + C\,dz + D\,du = 0$.

La

La quatrième $\frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0$, que donne l'équation $B\,dy + C\,dz + D\,du = 0$.

Si l'on prend à volonté trois de ces équations de condition, la quatrième s'ensuivra nécessairement. Prenons, par exemple, les trois premières. Si l'on prend dans la première la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, qu'on égale cette valeur à la valeur de la même quantité prise dans la seconde, qu'on multiplie le résultat par C & par D, qu'on transpose dans le premier membre le terme $-\frac{CB(dD)}{dx}$, & qu'on mette dans le second membre tous les termes où dx ne se trouve pas, il viendra $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{CD(dA)}{du} - \frac{CA(dB)}{du} + \frac{DA(dB)}{dz} - \frac{DB(dA)}{dz}$. En multipliant par B la troisième équation de condition & transposant dans le second membre tous les termes non affectés de dx, l'on trouve $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz} - \frac{BD(dA)}{dz}$. Égalant les valeurs de $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx}$, effaçant les quantités égales qui se

trouveront dans les deux membres de l'équation, divisant par A, transposant tous les termes dans le premier membre & les arrangeant, il viendra $\frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0$, qui est la quatrième équation de condition. Si l'on prenoit trois autres équations de condition, il en résulteroit également la quatrième. Ainsi pour savoir si une équation différentielle à quatre variables qu'on suppose n'être pas intégrable, peut le devenir en la multipliant par un facteur P, il suffira d'examiner trois des quatre équations de condition qu'elle donne. On peut prouver de même que de dix équations de condition que donne une équation différentielle à cinq variables il suffit d'en vérifier six ; car les autres suivent toujours de celles-là. De vingt équations de condition que donne une équation différentielle à six variables, il suffit d'en examiner dix. Et en général le nombre des variables étant m, le nombre des équations de condition nécessaires est $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$.

101. Lorsqu'une équation différentielle à plusieurs variables donnera les équations de condition nécessaires, on prendra pour P une fonction générale composée de toutes les variables de la différentielle avec des exposans & des coefficiens indéterminés, qu'on tâchera ensuite de déterminer par le moyen des équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} =$

$\frac{(dPC)}{dx}$, &c. réduites aux équations $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$, $\frac{P(dA)}{dz} + \frac{A(dP)}{dz} = \frac{P(dC)}{dx} + \frac{C(dP)}{dx}$, &c. Mais il n'eſt pas néceſſaire d'employer toutes ces équations dont le nombre ſeroit celui des différentes manières dont les lettres A, B, C, D, &c. peuvent être priſes deux à deux *; il ſuffira d'en employer un nombre moindre d'une unité que celui des variables de l'équation différentielle propoſée. En effet, ſi l'équation différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, eſt poſſible, elle donnera les trois équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, $\frac{(dPB)}{dz} = \frac{(dPC)}{dy}$, & l'équation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$; or (100), cette équation de condition ſuit des trois premières ; donc réciproquement une quelconque des trois premières ſuit des deux autres & de l'équation de condition. Ainſi ſi deux des trois

* Si le nombre des lettres eſt m, ces lettres peuvent être priſes deux à deux un nombre de fois $\frac{m(m-1)}{2}$. Voyez dans la première partie de cet ouvrage, ce qu'on a dit ſur le binome de Newton, & le Traité des Combinaiſons de nos Inſtitutions Mathématiques.

premières équations ont lieu, comme l'équation de condition eſt ſuppoſée avoir lieu, la troiſième aura néceſſairement lieu, & ſi P ſatisfait aux deux premières, P ſatisfera à la troiſième. En général ſi le nombre des variables eſt m & que P ſatisfaſſe à $m - 1$ équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, &c., P ſatisfera à toutes les équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, &c. de maniere qu'il ſuffit pour déterminer P, d'employer un nombre d'équations moindre d'une unité que celui des variables que renferme l'équation différentielle propoſée.

102. Quant à la forme qu'on doit donner au facteur P, on ne connoit pas de méthode générale pour la trouver. Dans les cas particuliers on pourra eſſayer, comme nous avons fait ci-deſſus (97); mais on réuſſira ſouvent par la méthode ſuivante. L'on prendra pour P une fraction $\frac{1}{M}$ dont le dénominateur ſoit une fonction poſitive ſans diviſeur variable, & d'un degré au-deſſus des fonctions A, B, C, &c., & qui ſoit une fonction de toutes les variables qui ſe trouvent dans ces fonctions, avec des coefficiens indéterminés. Cette regle eſt fondée ſur les deux remarques ſuivantes qui dérivent de la nature du calcul différentiel: 1°. on a obſervé que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce facteur à leurs différentielles, d'où l'on peut conclure que dans le grand nombre de cas où

cette remarque a lieu, la différentielle $PA\,dx + PB\,dy + PC\,dz +$ &c. qui a le facteur commun P à tous ses termes, l'aura aussi à son intégrale que nous désignerons par V : car si P n'étoit pas un facteur commun à tous les termes de la fonction V, il ne seroit pas non plus un facteur commun à tous les termes de la différentielle $dV = PA\,dx + PB\,dy +$ &c. 2°. On a remarqué que si une fonction V a un dénominateur variable, la différentielle dV de cette fonction aura un dénominateur qui sera un multiple de celui de l'intégrale V. Ainsi si $V = \frac{ax}{y}$, l'on aura $dV = \frac{aydx - axdy}{yy}$, où l'on voit que le dénominateur yy de dV est multiple du dénominateur y de la fonction V. Donc si en supposant ces deux remarques, on met au lieu du facteur P la quantité $\frac{m}{n}$, dans laquelle m & n sont des fonctions positives des variables qui entrent dans une différentielle dV proposée; par la premiere remarque m sera un facteur commun de la fonction V dont la différentielle $= \frac{m}{n} A\,dx + \frac{m}{n} B\,dy + \frac{m}{n} C\,dz +$ &c., & par la second remarque n contiendra le dénominateur de la fonction V. Si l'on divise la différentielle $dV = \frac{m}{n} A\,dx +$ &c. par son intégrale V, m disparoîtra du numérateur, & n se divisera par le dénominateur de l'intégrale, de maniere qu'il ne restera au dénominateur qu'une fonction M d'un

degré de plus que les fonctions A, B, C, &c. *; car la quantité $\frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz + \&c.}{M}$, qui résulte de cette division est $\frac{dV}{V}$, ou la différentielle du logarithme de V; donc elle doit être d'un degré au-dessous de l'unité **. Mais $\frac{dV}{V} = d.L.V$ est la différentielle de L.V; donc le théorême ci dessus (91) a toujours lieu, & à la place de P l'on peut substituer $\frac{1}{M}$ dans les équations que donne le théorême, M étant une fonction positive la plus générale des variables qui entrent dans dV, & d'un degré d'une unité de plus que A, B, C, D, &c. avec des coefficiens indéterminés; & s'il y a des radicaux dans A, B, C, &c. il faudra qu'ils entrent dans M en se combinant avec x, y, z, &c. de toutes les manieres possibles. Donc au lieu des équations $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$, &c, en mettant la quantité $\frac{1}{M}$

* Si $V = \frac{ax}{y}$, l'on a $\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$. Or ici les fonctions A & B sont évidemment du premier degré, & $xy = M$ est du second degré.

** On ne regarde pas les différentielles dx, dy, &c. comme augmentant le degré de la fonction; ainsi $x\,dx$ est une fonction du premier & non du second degré.

à la place de P, $-\frac{dM}{MM}$ à la place de d P, & multipliant le tout par M M, on aura les équations (N) $\frac{M(dA)}{ay} - \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} - \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dB)}{dz} - \frac{B\,dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dy} - \frac{C(dM)}{dy}$; &c. On déterminera par ces équations les coefficiens de M & par conséquent le facteur M lui-même. On intégrera ensuite la différentielle complette $\frac{dV}{V} = \frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz + \&c.}{M}$ par quelqu'une des méthodes du dernier problême.

103. Soit proposé d'intégrer l'équation $x\,dx + hy\,dx + mx\,dy + ny\,dy + p\,dy = 0$ *, ou $A\,dx + B\,dy = 0$, en faisant $A = x + hy$, & $B = mx + ny + p$. Puisque A & B sont des fonctions du premier degré de x & de y, il faut prendre pour M une fonction générale de x & de y de deux degrés avec des coefficiens indéterminés b, c, &c., laquelle fonction devant être un facteur de l'équation proposée, peut être supposée $= 0$, & l'on peut délivrer son premier terme de coefficient. Supposons $M = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$; on aura par ces

* Si le terme $x\,dx$ avoit un multiplicateur constant; en divisant tout par ce multiplicateur, on lui donneroit la forme de l'équation différentielle proposée qui est la plus générale de son ordre; si un terme tel que $mx\,dy$, par exemple, manquoit, on feroit $m = 0$; &c.

ſuppoſitions $\frac{(dA)}{dy} = h$, $\frac{(dB)}{dx} = m$, $\frac{(dM)}{dy} = bx + 2ey + f$, $\frac{(dM)}{dx} = 2x + by + c$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{M(dA)}{dy} - \frac{A(dM)}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx} = 0$ *, on aura l'équation

$$\left.\begin{array}{llllll} hx^2 + 2nxy + hcx + nby^2 + ncy + hg \\ +m \quad -2e \quad -f \quad -me \quad +bp \quad -mg \\ -b \quad\quad +2p \quad -he \quad -mf \quad +pc \end{array}\right\} = 0.$$

Si dans cette équation on fait chaque terme $= 0$; on aura ſix équations du premier degré, $h + m - b = 0$, $2n - 2e = 0$, $hc - f + 2p = 0$, $nb - me - he = 0$, $nc + bp - mf = 0$, $hg - mg + pc = 0$, qui donneront les coefficiens $b = h + m$, $c = \frac{ph - pm}{hm - n}$, $e = n$; $f = \frac{ph^2 + phm - 2pn}{hm - n}$, $g = \frac{-p^2}{hm - n}$, qu'on ſubſtituera dans la valeur de $M = xx + bxy +$ &c., ſubſtituant enſuite celle de M dans $\frac{Adx + Bdy}{M}$, on aura

$$\frac{(x + hy)dx + (mx + ny + p)dy}{x^2 + (m+h)xy + \left(\frac{ph - pm}{hm - n}\right)x + nyy + \left(\frac{phh + phm - 2pn}{hm - n}\right)y - \frac{p^2}{(hm - n)}}$$

* C'eſt la même que l'équation N (102), en tranſpoſant les termes.

$= \frac{A\,dx}{M} + \frac{B\,dy}{M}$. Pour intégrer l'on prendra selon le dernier problême, l'intégrale du premier terme $\frac{A\,dx}{M}$ en supposant x seul variable ; prenant ensuite l'intégrale de $\frac{B\,dy}{M}$ en regardant y seul comme variable, l'on suivra la premiere méthode du dernier problême. Or en faisant $hy = a$, $(m+h)y + \frac{ph-pm}{hm-n} = b'$, $ny^2 + \left(\frac{phh+phm-2pn}{hm-n}\right)y - \frac{p^2}{hm-n} = q$, on aura $\frac{A\,dx}{M} = \frac{(x+a)\,dx}{xx+b'x+q}$. Les facteurs du dénominateur de cette fraction rationnelle sont $x + \frac{1}{2}b' + \sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}$, $x + \frac{1}{2}b' - \sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}$; & supposant le premier $= x + r$, & le second $= x+t$, la différentielle $\frac{A\,dx}{M}$ sera $= \left(\frac{x+a}{(x+r).(x+t)}\right)dx = \frac{r-a}{(r-t)(x+r)} \times dx + \frac{a-t}{(r-t)(x+t)} \times dx$, dont l'intégrale est $= \left(\frac{r-a}{r-t}\right)$ L. $(x+r)$ + $\left(\frac{a-t}{r-t}\right)$. L. $(x+t)$. Substituant dans cette intégrale les valeurs de r, a & t, & ensuite celles de b' & q, on aura $\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}h}{\sqrt{(\overline{h+m}^{\,2} - 4n)}}\right) \times$ L. $\left[x + \left(\frac{h+m}{2}\right)y + \frac{p(h-m)}{2hm-2n} + \frac{1}{2}(y -\right.$

*

$\left.\frac{p}{hm-n}\right)\sqrt{(h+m)^2-4n}\Big]+\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}h}{\sqrt{(h+m)^2-4n}}\right)\right)\times$
$L.\left[x+\left(\frac{h+m}{2}\right)y+\frac{p(h-m)}{2hm-2n}-\frac{1}{2}\left(y-\frac{p}{hm-n}\sqrt{(h+m)^2-4n}\right)\right]$. Cette quantité étant égalée à une constante sera l'intégrale cherchée : car en différenciant on trouvera l'équation différentielle proposée ; ainsi il seroit inutile de prendre l'intégrale du terme $\frac{Bdy}{M}$.

104. Les équations particulieres font souvent connoître la forme du multiplicateur P cherché. Reprenons pour le faire voir l'équation générale de condition $\frac{P(dA)}{dy}+\frac{A(dP)}{dy}=\frac{P(dB)}{dx}+\frac{B(dP)}{dx}$. Supposons $dP=Tdx+Vdy$, T & V étant des fonctions de x & de y ; il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (88) que $\frac{(dP)}{dx}=T$, & $\frac{(dP)}{dy}=V$; donc en substituant, l'équation précédente devient $\frac{P(dA)}{dy}+AV=\frac{P(dB)}{dx}+BT$, ou $\frac{BT-AV}{P}=\frac{(dA)}{dy}-\frac{(dB)}{dx}$, équation que j'appelle (N) & qui suffit pour déterminer P dans les cas particuliers. Si l'on supposoit $\frac{(dA)}{dy}=\frac{(dB)}{dx}$, ce qui est le cas des équations différentielles complettes, l'on auroit $BT-AV=0$, $T=0$, $V=0$, & $dP=Tdx+Vdy=0$; donc alors P est l'unité ou une constante quelconque. Il est aisé de voir que

pour intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui n'eſt pas abſurde, il ſuffit de ſatisfaire à l'équation N, ce qui eſt toujours poſſible, quoique l'on n'ait pas de méthode générale pour cela. Cela réuſſit, facilement lorſque l'une des variables ne paſſe pas le premier degré, comme nous le ferons bien-tôt voir. Il en eſt de même lorſque les équations ſont *homogenes*, c'eſt-à-dire, lorſque chacun de leurs termes eſt de même degré par rapport aux variables.

Soit l'équation différentielle $py^n dx + qydx + rdy = 0$, telle que p, q & r ſoient des fonctions de x ſeul ſans y, nous aurons $\frac{(dA)}{dy} = npy^{n-1} + q$, $\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. En faiſant comme ci-devant $dP = Tdx + Vdy$, l'équation N devient $\frac{rT - py^n V - qyV}{P} = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$.

Soit $P = ty^m$, t étant une fonction de x ſans y, on aura $T = \frac{y^m dt}{dx}$, & $V = mty^{m-1}$. Subſtituant ces valeurs, on trouve l'équation $\frac{rdt}{tdx} - mpy^{n-1} - mq = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Pour faire uſage de cette équation il faut ſuppoſer $n = -m$, & l'on trouvera en diviſant par r, multipliant par dx & effaçant les termes inutiles, $\frac{dt}{t} = \frac{(1-n)qdx}{r} - \frac{dr}{r}$; donc en intégrant, $L.t = S.\frac{(1-n)qdx}{r} - L.r = S.\frac{(1-n)qdx}{r}.L.c - L.r$, ($c$ étant le nombre

dont le logarithme hyperbolique $= 1$). Donc $t = \frac{1}{r} c^{(1-n) . S . \frac{q d x}{r}}$; & puisque $n = - m$, il est visible que $P = t y^n$ sera $= \frac{y^{1-n}}{r} c^{(1-n) S . \frac{q d x}{r}}$. Multipliant la proposée par ce facteur & intégrant ; l'on aura $\frac{y^{1-n}}{1-n} c^{(1-n) S . \frac{q d x}{r}} + S . (\frac{p d x}{r} \times c^{(1-n) S . \frac{q d x}{r}} = C$. L'intégrale $S . \frac{q d x}{r}$ ne suppose que les méthodes qu'on a déja données pour intégrer les différentielles à une seule variable ; de sorte qu'il est aisé d'avoir cette intégrale.

La méthode dont on vient de faire usage réussit facilement lorsque l'une des variables ne monte qu'au premier degré. Car si l'on suppose $n = 0$, l'on aura $- m = 0$, & par conséquent $+ m = 0$; donc dans ce cas le facteur P sera $= t y^0 = t$; c'est à-dire une fonction de x sans y & la proposée deviendra $p d x + q y d x + r d y = 0$; donc l'intégrale sera $y c^{S . \frac{q d x}{r}} + S . (\frac{p d x}{r} . c^{S . \frac{q d x}{r}}) = C$. Si $n = 1$, l'on aura $1 - n = 0$, & la proposée sera $p y d x + q y d x + r d x = 0$, & le facteur $P = \frac{1}{r y}$. Multipliant l'équation différentielle précédente par ce facteur, on la réduira à cette forme $\frac{p d x + q d x}{r} + \frac{d y}{y} = 0$, dont l'intégrale $= S . \frac{(p + q) d x}{r} + L . y = C$.

105. On peut quelquefois simplifier les méthodes précédentes en partageant la proposée en plusieurs parties intégrables séparément. Soit, par exemple, l'équation $p y^q dy + p' y^{q+1} dx + p'' y^r dx = 0$, dans laquelle p, p', p'' sont des fonctions de x, q & r des exposans quelconques. On essayera le facteur $P y^n$, P étant une fonction de x sans y, & n un exposant indéterminé. Et pour plus de facilité on fera $n = -r$, de maniere que ce facteur devienne $P y^{-r}$; il est aisé de voir qu'il suffira de diviser la proposée par y^r & de regarder P comme le facteur. Divisant de plus par p & faisant $\frac{p'}{p} = t$, $\frac{p''}{p} = t'$, & multipliant par P, la proposée devient $P y^{q-r} dy + P t y^{q-r+1} dx + P t' dx = 0$. Mais P étant une fonction de x, $P t'$ le sera aussi, & $S. P t' dx$ se réduit à l'intégrale d'une différentielle à une seule variable.

La difficulté se réduit donc à rendre complette la différentielle $P y^{q-r} dy + t P y^{q-r+1} dx$; or cette différentielle sera complette si $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(P t y^{q-r+1})}{dy}$, ou si $\frac{y^{q-r}(dP)}{dx} = (q-r+1).y^{q-r} t P$; ou si $\frac{dP}{P} = (q - r + 1.) t dx$; donc en intégrant, $L. P = S. (q - r + 1.) t dx = S.(q - r + 1) t dx . L. c$; donc $P = c^{S.(q-r+1) t dx}$. Donc en substituant cette valeur de P dans l'équa-

quation différentielle réduite, & intégrant *, on aura $\left(\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}\right).c^{S.(q-r+1).tdx} + c^{S.(q-r+1).tdx} \times S.t^{1}\,dx = C.$

Soit maintenant les deux équations $dx + ady + (bx + cy)\,T\,dt = 0$, $f\,dx + a'\,dy + (b'x + c'y)\,t\,dT = 0$, T étant une fonction de la variable t; je multiplie l'une de ces équations differentielles, par exemple, la premiere par une quantité constante, mais indéterminée g; l'ajoutant ensuite à la seconde, je multiplie le résultat par P que je suppose une fonction de t, on trouvera l'équation $(gP + fP).\,dx + (gaP + a'P).dy + \left((gbP + b'P).\,x + (gcP + c'P)y.\right) \times T\,dt = 0$ (A). Si l'on suppose maintenant que cette équation est complette, on aura les équations suivantes.

$$\text{I. } \frac{d(gP+fP)}{dt} = \frac{d\left((gbP+b'P).x+(gcP+c'P).y\right)}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{d(gaP+a'P)}{dt} = \frac{d\left((gbP+b'P)\,x+(gcP+c'P).y\right)}{dy}$$

$$\text{III. } \frac{d(gP+fP)}{dy} = \frac{d(gaP+a'P)}{dx}.$$

* On intégrera les deux premiers termes comme s'il n'y en avoit pas d'autre; on peut intégrer le troisième par la méthode des différentielles à une seule variable.

t étant regardé comme constant dans la troisième équation, & P étant une fonction de t, il est évident que les deux membres de cette équation sont égaux à o, c'est-à-dire, que la dernière équation devient o = o. La première équation donne $\frac{dP.(g+f)}{dt} = P.(gb+b')$, la seconde donne $\frac{dP.(ga+a')}{dt} = (gc+c')P$. Donc $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+f}.dt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}dt$. En égalant ces valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divisant par dt, l'on a $\frac{gb+b'}{g+f} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$, équation du second degre qui en ôtant les fractions, & considérant g comme l'inconnue, fera connoître g; g étant connu, on connoîtra P : car de l'équation $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+f}dt$, l'on tire en intégrant, L. P $= \frac{gb+b'}{g+f}.t$ L. c, ou P $= c^{\left(\frac{gb+b'}{cg+f}\right)t}$. Donc l'équation A est complette & son intégrale est $= (gP+fP).x+(gaP+a'P)y = C$, en supposant que g désigne une valeur de g trouvée par l'équation du second degré dont on vient de parler. On auroit de même l'intégrale par l'autre valeur de g, il n'y auroit qu'à supposer g égal à cette nouvelle valeur g', & au lieu de la constante C écrire C' dans l'intégrale qu'on vient de trouver. Au moyen de ces deux intégrales, on éliminera facilement l'une des inconnues x ou y.

Suppoſons qu'on ait éliminé x, on aura une équation en y & t, qui ſera connoître la valeur de y en t; ſubſtituant enſuite cette valeur dans la première ou la ſeconde intégrale, on aura la valeur de x en t.

106. REMARQUE. Il eſt quelquefois très-commode, de partager une équation différentielle en plusieurs parties, & d'examiner ſi on peut les rendre complettes ſéparément par un facteur commun : car alors l'intégration pourra devenir fort aiſée. Soit l'équation différentielle $aydx + bxdy + cx^{u-1}y^p dx + gx^u y^{p-1} dy = 0$, je la partage en deux parties $aydx + bx\,dy$, $cx^{u-1}y^p dx + gx^u y^{p-1} dy$. Si l'on multiplie la première partie par $x^{an-1}y^{bn-1}$ elle devient $ay^{bn}x^{an-1}dx + bx^{an}y^{nb-1}dy$ dont l'intégrale $= \frac{1}{n}x^{an}y^{bn}$. La ſeconde partie devient intégrable en la multipliant par le facteur $x^{cm-u}y^{gm-p}$ *. Maintenant pour trouver un facteur commun, je fais $an-1 = cm-u$, $bn-1 = gm-p$; donc $n = \frac{cm-u+1}{a} = \frac{gm-p+1}{b}$; donc $m = \frac{ap-bu-a+b}{ag-bc}$, & par conſéquent $n = \frac{cp-gu-c+g}{ag-bc}$. Subſtituant ces valeurs de m & de n dans les facteurs ci-deſſus, ils deviendront égaux, & l'on aura un facteur commun qui rendra l'équation complette, & ſon intégrale ſera $\frac{1}{n}x^{an}y^{bn} + \frac{1}{m}x^{cm}y^{gm} = C$. Au reſte une équation différentielle totale multipliée par un facteur devient ſouvent complette quoiqu'aucune de ſes parties ne puiſſe être complettée ſéparément.

* n & m ſont des quantités indéterminées.

Il

107. Il est plus facile de trouver les conditions que doit avoir une équation pour pouvoir devenir complette par le moyen d'un facteur donné, que de trouver généralement le facteur qui doit rendre complette une équation différentielle d'un ordre donné lorsque cela est possible. Pour donner une idée de la méthode qu'on peut suivre dans certains cas nous allons résoudre le probléme suivant.

108. PROBLEME. *p, q, r, t étant supposés des fonctions de x, déterminer ces fonctions de manière que l'équation $dy + yydx + tdx = 0$ devienne complette en la multipliant par un facteur* $P = \frac{1}{pyy + qy + r}$. L'on aura l'équation $\frac{d(PA)}{dy} = \frac{d(PB)}{dx}$, ou en substituant les valeurs de P & de A, $\frac{1}{dy} d. \left(\frac{yy + t}{py^2 + qy + r}\right) = \frac{t}{dx} d. \frac{1}{pyy + qy + r}$; on prend la différentielle du premier membre en faisant varier y seul, & celle du second en regardant x seul comme variable. Donc $2y\ (pyy + qy + r) - (yy + t). (2py + q) = \frac{-yydp - ydq - dr}{dx}$. Transposant, ôtant la fraction, réduisant & ordonnant par rapport à y, il vient,

$$\left.\begin{array}{l} qyydx + 2rydx - qtdx \\ + yydp - 2ptydx + dr \\ \qquad + ydq \end{array}\right\} = 0.$$

Supposons maintenant que p, q, r & t sont tels que les co-efficients de chaque puissance de y soient $= 0$, l'on aura $qyydx + yydp = 0$, ou $q = -\frac{dp}{dx}$. L'on aura aussi $-qtdx + dr = 0$, ou $q = \frac{dr}{tdx} = \frac{-dp}{dx}$, ou $dp = \frac{-dr}{t}$, & $t = \frac{-dr}{dp}$. L'équation $q = -\frac{dp}{dx}$ donne $dq = \frac{-ddp}{dx}$, en supposant dx constant. Substituant la valeur de dq & celle de t dans l'équation $2rdx - 2ptdx + dq = 0$,

que donne la seconde colonne de l'équation ci-dessus, il vient $2rdx + \frac{2pdrdx}{dp} - \frac{ddp}{dx} = 0$, ou $rdp + pdr = \frac{dp.ddp}{2dx^2}$. L'intégrale du premièr membre est $= rp$, & il est facile de voir que celle du second est $= \frac{dp^2}{4dx^2} + C$, comme on le trouvera en revenant de l'intégrale à la différentielle ; donc l'on a $rp = \frac{dp^2}{4dx^2} + C$ ou $r = \frac{dp^2}{4p.dx^2} + \frac{C}{p}$, $q = -\frac{dp}{dx}$, $t = -\frac{dr}{dp} = \frac{C}{pp} + \frac{dp^2}{4ppdx^2} - \frac{ddp}{2pdx^2}$. Supposons maintenant $p = uu$, u étant une fonction quelconque de x, nous aurons $p = uu$; $q = -\frac{2udu}{dx}$; $r = \frac{C}{u^2} + \frac{du^2}{dx^2}$; $t = \frac{C}{u^4} - \frac{ddu}{u.dx^2}$. Ces valeurs étant substituées dans la proposée au lieu de p, q, r, t, l'équation $\frac{dy + yydx + tdx}{pyy + qy + r} = 0$ sera complette.

DE CE QU'ON PEUT FAIRE LORSQU'IL Y A TROP DE DIFFICULTÉ POUR TROUVER LE FACTEUR QUI DOIT RENDRE COMPLETTE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

109. On peut chercher la relation qu'il y a entre les variables de l'équation proposée. Si, par exemple, cette équation ne contient que deux variables x & y, on cherchera une valeur de y en x, par exemple, qui soit telle qu'elle rende l'équation $= 0$: Ce qui peut s'appeller aussi résoudre l'équation, ou intégrer l'équation.

110. Soit proposé d'intégrer l'équation différentielle à deux variables $Adx^m + Bdy^m + Cdx^n dy^{m-n} + Ddx^p y^{m-p}$ + &c. $= 0$, qui contient les différentielles

dx & dy élevées à des exposans dont la somme dans chaque terme est m, les co-efficiens A, B, &c. étant des fonctions de x, ou simplement des constantes. Je suppose $\frac{dy}{dx} = z$, ou $dy = z\,dx$. Substituant cette valeur de dy dans l'équation proposée, elle devient $Adx^m + Bz^m dx^m + Cz^{m-n} dx^m + Dz^{m-p} dx^m +$ &c. $= 0$. ou en divisant par dx^m, $A + Bz^m + Cz^{m-n} + Dz^{m-p}$ + &c. $= 0$, équation à deux variables z & x. On trouvera donc par cette équation la valeur de z en x & constantes. Substituant cette valeur dans $z\,dx$, on aura une différentielle à une seule variable dont l'intégrale sera $= y$, puisque $dy = z\,dx$.

Soit l'équation $A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dx\,dy = 0$, on aura dans l'équation générale, $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, & en faisant $dy = z\,dx$, substituant cette valeur & divisant ensuite par dx^2, on trouvera $A + Bz^2 + Cz = 0$, ou $z^2 + \frac{Cz}{B} = -\frac{A}{B}$. Resolvant cette équation par la méthode du second degré, il vient $z = \frac{-C \pm \sqrt{(CC - 4AB)}}{2B}$, $dy = z\,dx = \frac{-C\,dx \pm dx\sqrt{(CC - 4AB)}}{2B}$, $y = S. \frac{-C\,dx}{2B} \pm S. \frac{dx\sqrt{(CC - 4AB)}}{2B} +$ E constante. Supposons $A = b$, $C = a$, $B = \frac{x}{2}$, l'on aura $dy = -\frac{a\,dx}{x} \pm \frac{dx}{x}\sqrt{(aa - 2bx)}$, & intégrant en ajoutant la constante E, $y = E - aL.\,x \pm S.\frac{dx}{x}.\sqrt{(aa - 2bx)}$. Or $S.\frac{dx}{x}\sqrt{(aa - 2bx)} = 2\sqrt{(aa - 2bx)} + aL.\frac{\sqrt{(aa - 2bx)} - a}{\sqrt{(aa - 2bx)} + a}$. Il est donc facile d'avoir la valeur de y qui est double, comme il est aisé de le voir.

DE LA MÉTHODE DE M. NEWTON D'INTÉGRER PAR LES SÉRIES, LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI CONTIENNENT PLUSIEURS VARIABLES DANS LEURS TERMES AVEC LES DIFFÉRENCES DE CES VARIABLES ÉLEVÉES A DES PUISSANCES QUELCONQUES.

111. La méthode dont il s'agit ici se trouve dans le Traité de la *Méthode des Fluxions & des Séries infinies*: Elle suppose la théorie des suites, & ceux qui ont lu la première partie de cet ouvrage, sont très en état de la comprendre. Si l'équation différentielle contient quelque fraction rationnelle ou irrationnelle, dont le dénominateur soit complexe, il faut la réduire en suites ou séries infinies par la formule du binome, ou par la division. S'il y a des radicaux qui renferment des quantités complexes, on les réduira en séries par la formule du binome de Newton Si l'on a besoin de trouver les racines d'une équation affectée, c'est-à-dire qui contient deux variables, comme si on demandoit la racine y de l'équation $y^3 + a^2y + axy - x^3 + 2a^3$, qui donne $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} +$ &c, on trouvera ces sortes de racines par des séries, & cela en employant les méthodes de la premiere partie de cet ouvrage.

Lorsque l'équation différentielle contient deux variables, il faut mettre d'un côté le rapport $\frac{dy}{dx}$ & de l'autre la valeur de ce rapport exprimé par une suite finie ou infinie.

Soit l'équation $dy^3 + axdx^2dy + a^2dx^2dy - x^3dx^3 + 2a^3dx^3 = 0$, divisant tout par dx^3 & faisant $\frac{dy}{dx} = z$, il vient $z^3 + axz + aaz - x^3 + 2a^3$. Prenant la racine z de cette équation affectée, on trouve

$$z = \frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \&c.\ ^*$$

Dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, nous appellerons *quantités relatives* dy & la variable y dont la différentielle est au numérateur, & *quantités corrélatives* dx, & x, dont la différentielle se trouve au dénominateur. Mais dans la fraction $\frac{dx}{dy}$, x & dx seront les quantités relatives, y & dy les quantités corrélatives.

112. Soit maintenant l'équation $dx - dy + 3xdx + ydx + x^2dx + xydx = 0$. Pour la disposer comme on vient de le dire (111), je divise tout par dx & j'ai en transposant $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$. L'équation étant ainsi préparée, 1°. On disposera les termes suivant les dimensions des variables x & y, mettant en premier lieu ceux qui ne sont pas affectées de la variable relative & ensuite ceux où cette variable se trouve, en commençant toujours par ceux dont les dimensions sont les plus petites. Ainsi dans l'exemple proposé, on écrira $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$.

2°. Ayant décrit un rectangle ABDC (Fig. 12) & l'ayant divisé comme on le voit, écrivez dans le rectangle horisontal KBFR la suite des termes où la variable relative ne se trouve pas. C'est ici $1 - 3x + x^2$; écrivez aussi de haut en bas dans le rectangle vertical ERSP, l'autre suite de termes $+y + xy$ où se trouve la variable relative.

---

* Voyez ce qu'on a dit sur les suites, Premiere Partie, Courbes Algébriques, N°. 42 & suivants. Si l'on résout l'équation du troisième degré, en regardant z comme l'inconnue, on pourra réduire en série la valeur de z qui contiendra les radicaux de la formule de Cardan.

3°. Prenez le premier terme 1 de la suite horisontale, multipliez-le par la variable x corrélative & divisez le produit par l'exposant de la corrélative dans le même produit : ici on divisera par 1. Ecrivez le résultat x dans le rectangle horisontal NHDM, à côté de y ; vous aurez le premier terme de la série qui doit exprimer la valeur de la variable relative y.

4°. Pour avoir le second terme de cette série, substituez dans tous les termes de la série verticale $y + xy$ placée dans le rectangle ERSP, le premier terme que vous venez de trouver au lieu de la variable relative, & écrivez la valeur de chaque terme du résultat dans le rectangle RSQF à côté du terme qui l'a donné, & dans le rang qui convient à la dimension de la variable corrélative dans cette valeur. Dans notre exemple le résultat sera $x + xx$, on écrira $+ x$ à côté de y au second rang sous le terme $- 3x$ de même dimension, & le terme $+ xx$ à côté de xy sous le terme $+ xx$ de même dimension de la suite horisontale $1 - 3x + xx$. Prenez ensuite dans le rectangle KSQB, la somme des termes dans lesquels la variable corrélative a la plus petite dimension après le plus bas terme de la suite horisontale qui est ici $= 1$: cette somme sera dans notre exemple $- 3x + x = - 2x$, comme on le voit au second rang dans le rectangle des sommes SNMQ. Multipliez cette somme par la variable corrélative, & ayant divisé le résultat par l'exposant de la corrélative dans ce même résultat, écrivez le quotient dans le rectangle NHDM pour le second terme de la série qui doit exprimer la valeur de y. Dans notre exemple on multipliera $- 2x$ par x & divisant le produit $- 2x^2$ par l'exposant 2 de x, l'on écrira $- xx$ pour le second terme de la série cherchée.

5°. On substituera dans la série $y + xy$, le second terme $- x^2$ de la série au lieu de la variable y, & on écrira la valeur de chaque terme du résultat à côté de leur correspondant & dans le rectangle RSQF, & au rang qui convient à la dimension de la variable corrélative. Dans notre exemple en substituant $- x^2$ dans la série $y + xy$, l'on aura les termes $- x^2$, & $- x^3$; on écrira

$-x^2$ à côté de y sous le terme $+x^2$ de même dimension dans la suite horisontale $1-3x+xx$, & le terme $-x^3$ à côté de xy, & au quatrième rang. Ensuite l'on prendra dans le rectangle KSQB la somme des termes dans lesquels la variable corrélative a la plus petite dimension après ceux dont on a pris la somme dans l'opération précédente; c'est-à-dire, quand on a voulu trouver le second terme de la série. Cette somme est ici $xx - xx + xx = xx$. On la multipliera par la variable corrélative x & l'on divisera le produit x^3 par l'exposant 3 de x dans le même produit, l'on écrira le résultat $\frac{1}{3}x^3$ dans le rectangle NHDM pour le troisième terme de la série cherchée. En opérant de même on trouvera le quatrième terme $-\frac{1}{6}x^4$; & ainsi de suite, & l'on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 -$ &c.

Voici la raison de ce procédé: puisque $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + x^2 + y + xy$, l'on a $dy = dx + 3xdx + x^2dx + ydx + xydx$, & en intégrant il vient $y = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + S.ydx + S.xydx$, d'où l'on voit que x est le premier terme de la série qu'on cherche, & qu'on trouve ce terme en opérant comme nous l'avons fait. Si l'on suppose maintenant que la série qu'on cherche est trouvée, & qu'elle soit représentée par $x+p$, p étant la somme de tous les termes qui suivent le premier; en substituant $x+p$ au lieu de y dans les termes $+y$, $+xy$, l'on aura $y + xy = x + xx + p + xp$, & l'équation $dy = dx - 3x + xxdx + (y+xy)\,dx$ deviendra (A) $dy = dx - 3xdx + xxdx + (p+xp)\,dx$,
$+ xdx + xxdx$

& en intégrant il viendra $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + S.(p+xp)\,dx$. Ce qui fait voir que le second terme de la série cherchée est $-xx$, tel que le donne la méthode de Newton.

Supposant de même que p' désigne tous les termes de la série qui suivent le second, l'on aura $y = x - xx + p' = x + p$; donc $p = -xx + p'$, & en substituant $-xx + p'$ au lieu de p dans les deux termes $p + xp$, &

réduisant, l'équation A deviendra $dy = dx - 2xdx + x^2dx - x^3dx + (p^I + xp^I)dx$, & en intégrant l'on trouve $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + S.(p^I + xp^I)dx$; ce qui fait voir que le troisième terme de la série cherchée est $= \frac{1}{3}x^3$, ainsi que le donne notre opération. De même en supposant $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + p^{II}$, l'on trouvera que le quatrième terme est $-\frac{1}{6}x^4$, & ainsi des autres termes. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que par la nature des opérations que prescrit la méthode, on doit trouver le même résultat que par la méthode analytique dont nous venons de parler.

113. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. à l'infini, on écriroit le terme 1 dans le rectangle horisontal KRFB (Fig. 13) & l'on écriroit les autres termes dans le rectangle vertical ERSP. Multipliant 1 par x & divisant le produit x par l'exposant 1 de x, dans ce même produit, on écrira le quotient x dans le rectangle NHDM, pour le premier terme de la suite qui doit exprimer la valeur de y. On substituera le premier terme x qu'on vient de trouver, au lieu de y dans les termes du rectangle vertical ERSP, écrivant la valeur de chaque terme à côté du terme correspondant dans le rectangle RSQF, au rang qui convient à la dimension de la corrélative dans la valeur de ce terme. Pour trouver le second terme de la série, on multipliera $\frac{x}{a}$ par x & divisant le produit $\frac{x^2}{a}$ par l'exposant 2, on écrira le quotient $\frac{xx}{2a}$ à côté du premier terme de la série, & continuant d'opérer en substituant $\frac{xx}{2a}$ au lieu de y dans les termes du rectangle ERSP, écrivant les résultats ainsi qu'on le voit dans le rectangle RFQS, prenant la somme des termes du troisième rang,

qui est $+\frac{xx}{2aa}+\frac{xx}{aa}=\frac{3xx}{2aa}$, on la multipliera par x, & divisant la produit $\frac{3x^3}{2aa}$ par l'exposant 3, le quotient $\frac{x^3}{2aa}$ sera le troisième terme de la suite cherchée; & en continuant de même, on aura $y=x+\frac{xx}{2a}+\frac{x^3}{2aa}+\frac{x^4}{2aa^3}+\frac{x^5}{2a^4}+\frac{x^6}{2a^5}$ &c.

Dans cet exemple on ne s'est proposé de pousser la série que jusqu'à la sixième dimension de x, & c'est pour cela qu'on a omis dans l'opération tous les termes qu'on prévoyoit devoir être inutiles pour cette fin, comme on l'a indiqué par le signe &c. qu'on a ajouté à toutes les séries interrompues.

114. Lorsque la variable relative a des exposans fractionnaires, on peut faire disparoître ces exposans par la méthode du n°. 55. Si l'équation proposée étoit $\frac{dy}{dx}=3xy^{\frac{2}{3}}+y$, la progression arithmétique dans laquelle se trouvent les exposans de y seroit $\div$ o. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. 1, prenant le terme qui approche le plus de o *, je fais $u=y^{\frac{1}{3}}$, ou $y=u^3$; donc $dy=3uudu$. Substituant ces valeurs de y & de dy dans la proposée, elle devient $\frac{3uudu}{dx}=3xuu+u^3$. & en divisant par $3uu$, l'on a $\frac{du}{dx}=x+\frac{1}{3}u$, & cherchant la valeur de la relative u, par la méthode de Newton, l'on trouvera la série $u=$

* En général si le terme le plus approchant de o est $\frac{p}{q}$, on fera $y^{\frac{p}{q}}=u^p$, ou $y^p=u^{pq}$.

$\frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240}$ &c. mais $u = y^{\frac{1}{3}}$; donc $y = u^3 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)^3 = \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{24}x^7 + \frac{7}{864}x^8$ &c.

A l'égard des exposans fractionnaires de la quantité corrélative x, on les disposera selon leurs dimensions. Par exemple si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + y + y^2 + x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{2}}$, on la disposeroit ainsi $\frac{dy}{dx} = 1 + x^{\frac{2}{3}} + x + x^{\frac{5}{2}} + y + y^2$, & l'on opéreroit à l'ordinaire.

Soit l'équation $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. Supposant $y^{\frac{1}{2}} = u$, l'on aura $uu = y$, $dy = 2udu$, & l'équation proposée deviendra $\frac{2udu}{dx} = 2u + ux^{\frac{1}{2}}$, ou $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$; donc $du = dx + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, & en intégrant, $u = y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, & en quarrant de part & d'autre, $y = xx + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Mais parce qu'on peut ajouter une constante à l'intégrale, l'on a $u = y^{\frac{1}{2}} = C + x + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$, & en quarrant, $y = C^2 + 2Cx + \frac{2}{3}Cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$, série bien différente de la première & qui ne peut lui devenir égale que lorsque $C = 0$.

De même, dans l'exemple ci-dessus, où nous avons trouvé $y = u^3 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)^3$, le résultat

ſera bien bien différent ſi l'on ajoute la conſtante C à la valeur de u, pour avoir $u = \left(C + \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)$, alors on aura $y = \left(C + \frac{1}{2} xx + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)^3$, ſérie qu'on variera à l'infini en donnant différentes valeurs à C. Il faut avoir l'attention d'ajouter une conſtante lorſqu'on a trouvé la valeur de la relative u, avant de prendre enſuite celle de y. Mais ſi y ne contenoit aucun expoſant fractionnaire, alors on ajouteroit la conſtante C à la ſérie qui exprime la valeur de y; car ſi l'on a l'équation $\frac{dy}{dx} = u$, u déſignant une ſuite de termes compoſés de x, y & conſtantes, l'on aura $dy = udx$, & $y = C + S.udx$, en ajoutant la conſtante C.

115. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = y + ay^2 + xy^4$, comme il n'y a aucun terme qui ne ſoit affecté de y, l'on n'en peut mettre aucun dans le rectangle horiſontal KRFB. Dans ce cas l'on prendra pour le premier terme de la ſérie, une conſtante arbitraire, autrement l'on ne pourroit avoir le premier terme de la racine.

De plus, on peut prendre même dans les autres cas, pour le premier terme de la ſérie cherchée, telle quantité conſtante qu'on voudra, ſubſtituer enſuite cette conſtante au lieu de la relative dans les termes du rectangle vertical ERSP, & continuer l'opération à l'ordinaire, pour trouver les autres termes de la ſérie cherchée.

Ainſi dans l'équation ci-deſſus $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + x^2 + y + xy$, ſi l'on prend (Fig. 14), 1 pour le premier terme de la ſérie, en ſubſtituant 1 au lieu de y dans les termes $+ y$, $+ xy$, l'on aura $+ 1 + x$. On écrira 1 à côté de y ſous le terme 1 de la ſérie horiſontale $1 - 3x + x^2$, & $+ x$ à côté de xy, ſous le terme $- 3x$; enſuite on prendra la ſomme $+ 1 + 1 = 2$ des plus bas termes, & multipliant cette ſomme par la corrélative x, l'on diviſera le produit $2x$ par l'expoſant de x dans ce produit, & l'on écrira le réſultat $+ 2x$

dans le rectangle N H D M pour le second terme de la série, & en continuant les opérations à l'ordinaire, l'on aura $y = 1 + 2x^1 + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c. Si au lieu de prendre 1 pour premier terme l'on eût pris a, l'on auroit trouvé une série différente.

Cela prouve qu'en général il y a une infinité de valeurs différentes de y qui peuvent résoudre une équation à deux variables, & en effet une telle équation exprime un problême indéterminé, & ces sortes de problêmes ont une infinité de solutions.

116. Si dans l'équation $\frac{dy}{dx} = p$, la suite p contient quelque terme qui ait pour dénominateur quelque puissance de l'une des variables, on réduira ce terme en une série infinie, en substituant, au lieu de cette variable, une autre variable plus ou moins une constante arbitraire. Par exemple, si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 3y - 2x + \frac{x}{y}$, l'on pourroit faire $y = z \pm c$, & le terme $\frac{x}{y}$ seroit $= x.(z \pm c)^{-1}$. Supposons qu'on fasse $y = 1 + z$, on élévera $1 + z$ à la puissance -1 par le binome de Newton, & l'on multipliera tous les termes de la série résultante par x, de plus, on substituera $1 + z$ au lieu de y dans le terme $3y$. Si l'on avoit fait $y = a - z$, l'on auroit eu $dy = -dz$, & le premier membre de l'équation seroit devenu négatif & $= -\frac{dz}{dx}$; mais on l'auroit rendu positif en changeant les signes de tous les termes du second membre.

117. On peut quelquefois trouver l'intégrale d'une équation fort facilement sans avoir recours à la méthode de Newton. Soit, par exemple, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{5x}$, je suppose $y = bx^m$, le coefficient b & l'exposant m étant des quantités indéterminées. Substituant bx^m au lieu de y dans la proposée, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}bx^{m-1}$, ou dy

$=\frac{4}{5}\, b\, x^{m-1}\, dx$, & $y=\frac{4}{5m} bx^{m}=bx^{m}$; donc $\frac{4}{5m}=1$, ou $\frac{4}{5}=m$, & $y=b\,x^{\frac{4}{5}}$, b étant indéterminé, & l'on pourra donner à b telle valeur qu'on voudra.

On doit remarquer aussi que si la quantité qu'on doit substituer dans le rectangle vertical E R S P au lieu de y, étoit complexe, il faudroit prendre son quarré, lorsque le terme dans lequel se fait la substitution contient y^2, son cube, si le terme contient y^3, &c.

On peut quelquefois commencer l'opération par la plus haute puissance de la quantité corrélative, en descendant par degré aux puissances inférieures. Par exemple, si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{xx}+\frac{1}{xx}+3+2x-\frac{4}{x}$. Après avoir disposé les termes d'une maniere contraire à l'ordinaire, en commençant par le plus haut terme $2x$, comme on le voit (Fig. 15), on trouveroit, suivant la méthode, xx pour le premier terme de la valeur de y. Pour trouver le second terme on substituera xx au lieu de y dans le terme $+\frac{y}{xx}$ du rectangle ERSP, & on écrira le résultat 1 dans le rectangle R S Q F au second rang sous le terme $+3$, on prendra la somme 4 des deux termes correspondans $+1$ & $+3$, on la multipliera par x, & ayant divisé le produit $4x$ par l'exposant 1 de x dans le même produit, on aura $+4x$ pour le second terme de la série cherchée, on trouvera les autres termes en suivant la regle prescrite.

REMARQUE I. Lorsque la suite des exposans dans une série est interrompue, on peut mettre o à la place du terme qui manque, en lui donnant le signe + ou — comme on voudra.

REMARQUE II. Parmi les suites qui expriment la valeur de y en x, ou la valeur de x en y, on préférera celles qui donnent x en y, si elles sont plus convergentes que celles qui donnent y en x. Par exemple, la série $xx+4x+0-\frac{1}{x}+\frac{1}{2xx}$ &c. qui désigne la valeur de y sera conver-

gente en supposant $x > 1$. En observant ce qu'on a dit ci-dessus (115), c'est-à-dire, en écrivant a, par exemple, pour le premier terme d'une série qui doit donner la valeur de y, on pourra ensuite, en donnant à a différentes valeurs, avoir autant de séries différentes qu'on voudra. On trouve encore des séries finies comme celle qu'on a trouvée ci-dessus (114).

118. PROBLEME. *Intégrer les équations qui contiennent plus de deux variables avec leurs premières différences & leurs produits quelconques.* Lorsque l'équation proposée contient trois variables, si la relation de deux de ces variables est connue, on se servira de cette relation pour trouver le rapport des différences de ces deux variables, & pour éliminer l'une de ces variables avec sa différence; ainsi l'on n'aura plus qu'une équation à deux variables qu'on pourra intégrer par quelqu'une des méthodes précédentes. Si cette relation est inconnue, on pourra la former à volonté, & réduire, par le moyen de cette relation, l'équation proposée à la forme de l'une de celles que nous avons intégrées dans les deux derniers problèmes. Si l'équation contient quatre variables, on la réduira à trois par la relation donnée ou prise à volonté entre deux de ses variables, & on réduira ensuite celle-ci à deux variables. Si la proposée contient cinq variables, on la réduira à quatre par une relation supposée, si elle n'est donnée par l'état de la question; on réduira ensuite le nombre des variables à trois & enfin à deux, & ainsi de suite, quelque nombre que l'on ait de variables.

Soit l'équation à trois variables $2dx - dz + xdy = 0$, dans laquelle la relation entre deux de ses variables n'est point déterminée. On formera à volonté cette relation, en supposant, par exemple, $y = x$, ou $x = yy$, ou, &c. ou bien entre y & z, en supposant $y = z + a$, $y = 3z + b$, $y = z^2$ &c. Supposons qu'on préfere la relation $x = yy$; l'on aura $dx = 2ydy$. Substituant ces valeurs de x & de dx dans la proposée, il vient $4ydy - dz + yydy = 0$, & en intégrant $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$, ou $z = 2yy + \frac{y^3}{3}$ pour la relation de z & de y, & en écrivant x

pour y^2 & $x^{\frac{1}{2}}$ pour y^3, l'on aura $2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} = z$, équation entre z & x; on auroit trouvé des résultats différents en égalant l'intégrale à une constante. Dans le nombre infini de relations que peuvent avoir les trois variables x, y, z; nous en avons trouvé une qui est représentée par les équations $x = yy$, $2yy + \frac{y^3}{3} = z$, $2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} = z$; & comme on peut en trouver une infinité d'autres, il est évident que c'est un cas particulier de l'intégrale générale de l'équation proposée.

Nous terminerons cette matière en remarquant que lorsque l'on aura réduit l'equation proposée, à la forme $\frac{dy}{dx} = p$, p étant une suite finie ou infinie de termes composés des variables x & y, on aura $dy = p\,dx$, & $y =$ S. $p\,dx$ + C. Si l'on peut avoir l'intégrale S. $p\,dx$, il sera inutile d'employer la méthode de Newton. Ce sera la même chose si l'on peut avoir l'intégrale de l'équation $dy - p\,dx = 0$, par le moyen d'un multiplicateur ou sans ce multiplicateur. Ce sera encore la même chose lorsque la proposée contenant plus de deux variables, aura été réduite à deux variables, & qu'on pourra en trouver l'intégrale par les méthodes ci-dessus.

DE LA SÉPARATION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

119. Soit l'équation $aydx = bxdy$, on séparera facilement les variables en divisant les deux membres par x & y, ce qui donnera $\frac{a\,dx}{x} = \frac{b\,dy}{y}$, équation où les indéterminées sont séparées & qu'on peut facilement intégrer. Si l'on avoit cette autre équa-

tion $\frac{b\,dy}{x^m y} = a\,dx$, en multipliant par x^m, l'on auroit $\frac{b\,dy}{y} = a x^m dx$, équation dont les variables sont séparées, & qu'il est aisé d'intégrer, par la méthode des différentielles à une seule variable.

Il est bon de remarquer qu'il peut arriver qu'aucun des deux membres de l'équation séparée ne soit intégrable algébriquement, quoique l'équation qui a produit la différentielle soit, ou algébrique, ou réductible à une forme algébrique.

Dans la première équation séparée, l'on a $\frac{a\,dx}{x} = \frac{b\,dy}{y}$, & en intégrant, aL.$x = b$L.$y +$L.f, la constante qu'on ajoute peut être un logarithme, ou L. $x^a =$ L fy^b; donc $x^a = fy^b$, équation algébrique. Si l'on vouloit intégrer l'autre équation séparée $\frac{b\,dy}{y} = ax^m dx$, l'on trouveroit facilement b L$y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} = f x^p$ L. c, (en faisant $f = \frac{a}{m+1}$, $m + 1 = p$, & c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$); donc $y^b = c^{f x^p}$.

Il est aisé de voir par ce qu'on vient de dire, que la séparation des variables, consiste à faire ensorte que chaque terme d'une équation ne contienne qu'une seule variable. Il n'est pas moins évident qu'on peut intégrer du moins par les quadratures

dratures toute différentielle dont les variables sont séparées.

Toute équation de cette forme $PRdx = QVdy$, pourra être séparée si P & V sont des fonctions de x sans y, & R & Q des fonctions de y sans x: car en divisant par R V, l'on a $\frac{(Pdx)}{V} = \frac{(Qdy)}{R}$, équation dans laquelle les variables sont séparées: ainsi l'équation $x^2y^3dx = ay^5x^3dy$ admet la séparation des variables. En effet en divisant par y^3x^3, l'on a $\frac{x^2}{x^3}dx = \frac{ay^5}{y^3}dy$, ou $\frac{dx}{x} = ay^2dy$.

Les moyens dont on se sert pour la séparation, sont les regles ordinaires de l'algebre & les substitutions.

120. PROBLÊME. *Séparer les indéterminées dans les équations homogenes à deux variables x & y.* On appelle *équations homogenes* celles dans lesquelles la somme des dimensions des variables, soit qu'elles soient mêlées ou qu'elles se trouvent seules, est la même dans tous les termes. Représentant toutes ces équations par $Adx + Bdy = 0$, & supposant que la somme de ces dimensions est $= n$, faisant $y = xu$, ou $\frac{y}{x} = u$; en substituant la valeur de y, les fonctions A & B deviendront $A = x^n V$, & $B = x^n V'$, V & V' étant des fonctions de u sans x ni y: car puisque A & B

sont des fonctions homogenes de la dimension n, V & V' des fonctions de u ou de $\frac{y}{x}$, il est clair que V & V' doivent être des fonctions de dimension nulle de y & de x, c'est-à-dire telles que y & x ayent le même nombre de dimensions au numérateur & au dénominateur. Cela posé, notre équation deviendra $x^n V dx + x^n V' dy = 0$, ou $V dx + V' dy = 0$. Mais l'équation $y = xu$, donne $x = \frac{y}{u}$, & $dx = \frac{udy - ydu}{uu}$; donc en substituant la valeur de dx, l'on a $\frac{Vudy - Vydu}{uu} + V'dy = 0$. Otant la fraction & transposant, il vient $Vudy + uuV'dy = Vydu$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{Vdu}{Vu + uuV'}$. Mais V & V' sont des fonctions de u; donc les variables sont séparables dans ces sortes d'équations.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^3 dx + y^2 xdy + bx^3 dy = 0$. Si l'on compare cette équation avec $A dx + B dy = 0$, l'on trouve $A = y^3$, $B = y^2 x + bx^3$, $n = 3$, $A = x^3 V$, $B = x^3 V'$; donc $V = \frac{y^3}{x^3}$, $V' = \frac{y^2 x + bx^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} + b$. Mais $\frac{y}{x} = u$; donc $V = u^3$, & $V' = u^2 + b$. Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{Vdu}{Vu + uuV'} = \frac{dy}{y}$, il vient $\frac{udu}{2uu + b} = \frac{dy}{y}$;

& en intégrant, $L.y = \frac{1}{4} L.(2uu + b) + L.C$, ou $y = C(2uu + b)^{\frac{1}{4}}$, & $y^4 = C^4.\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$, en remettant la valeur de u.

121. PROBLÈME. *Intégrer les équations différentielles homogenes à trois & tant de variables qu'on voudra, lorsque* A, B, C, *sont des fonctions homogenes de* x, y & z *dans tous les termes.* Soit $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, l'équation qu'on demande d'intégrer, A, B, C étant des fonctions homogenes des variables x, y & z, nous prenons une équation à trois variables seulement, mais celles qui en ont d'avantage ne demandent pas d'autres calculs. On examinera d'abord si la proposée est possible en cherchant si elle donne l'équation de condition ci-dessus dont nous avons parlé ci-dessus. Si elle étoit absurde, on l'abandonneroit. Ensuite on fera $y = xu$, & $z = xt$, & l'on substituera ces valeurs dans l'équation proposée. Supposons maintenant que A, B, C soient des fonctions de la dimension m, il est évident que l'on aura $A = x^m f$, $B = x^m g$, $C = x^m h$, f, g, h étant des fonctions de u & de t. Substituons aussi la valeur $x\,du + u\,dx$ de dy & la valeur $x\,dt + t\,dx$ de dz, on aura la transformée suivante $x^m dx\,(f + gu + ht) + x^{m+1} g\,du + x^{m+1} h\,dt = 0$, ou en divisant par x^{m+1}, & par le multiplicateur de $x^m dx$, $\frac{dx}{x} + \frac{g\,du + h\,dt}{f + gu + ht} = 0$. Il est visible que le premier terme ne contient qu'une seule variable x,

& que x ne se trouve que dans ce terme. L'intégrale de cette équation est $L.x + S.\frac{gdu + hdt}{f + gu + ht}$ $=$ D constante; donc. $L.x - D = S.\frac{gdu + hdt}{f + gu + ht}$; donc la différentielle $\frac{gdu + hdt}{f + gu + ht}$ est complette, & l'on trouvera son intégrale par quelqu'une des méthodes précédentes.

122. COROLLAIRE I. De ce que $\frac{dx}{x} + \frac{gdu + hdt}{f + gu + ht} = 0$, est une différentielle complette, on peut tirer tout de suite le facteur P, par lequel il faudroit multiplier la proposée pour l'intégrer sans la séparation des indéterminées * : car l'équation n'est devenue complette qu'en divisant par $x^{m+1}(f + gu + ht)$, ou par $xA + yB + zC$; puisque $x^{m+1}f = xA$, $x^{m+1}gu = x^m gux = Bux = By$, & $x^{m+1}ht = x^m htx = Ctx = Cz$; donc $\frac{Adx + Bdy + Cdz}{Ax + By + Cz}$ est une différentielle complette; donc le facteur P qui avoit disparu par l'égalité à o étoit $= \frac{1}{Ax + By + Cz}$.

123. COROLLAIRE II. De-là suit le beau théorême de M. Fontaine, sçavoir que si Adx

---

* Il s'agit de la séparation de x; car les u & t peuvent être mêlés entre eux.

$+ B\,dy + C\,dz$ eſt une différentielle homogene ſans conſtantes, & telle que m ſoit le degré des fonctions A, B, C, l'intégrale de cette différentielle ſera $\frac{Ax + By + Cz}{m+1}$; en effet, en ſubſtituant xu au lieu de y, & tx au lieu de z, la différentielle devient $x^m\,dx\,(f + gu + ht) + x^{m+1}\,g\,du + x^{m+1}\,h\,dt$; mais cette différentielle ne peut être intégrable à moins que ſon intégrale ne ſoit $\frac{x^{m+1}(f + gu + ht)}{m+1}$, que l'on trouve en intégrant la quantité $x^m\,dx\,(f + gu + ht)$ en regardant x ſeul comme variable. De plus il eſt viſible qu'il ne lui faut ajouter aucune fonction de u & de t, puiſque ſi on lui en ajoutoit une, lorſqu'on différencieroit l'intégrale, ce qui viendroit de cette addition ne ſeroit pas multiplié par x^{m+1} comme le ſont les termes $x^{m+1}\,g\,du$, & $x^{m+1}\,h\,dt$. Cela poſé, remettons dans $\frac{1}{m+1}\,x^{m+1}(f + gu + ht)$, la fraction $\frac{y}{x}$ au lieu de u, $\frac{z}{x}$ au lieu de t, A au lieu de $x^m f$, B au lieu de $x^m g$, & C au lieu de $x^m h$, & nous aurons $\frac{Ax + By + Cz}{m+1}$ *, pour l'intégrale de la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

124. COROLLAIRE III. Puiſque A, B, C, &c. étant des fonctions homogenes de dimenſion m

* On doit ſe ſouvenir d'ajouter une conſtante.

de variables sans constantes, la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c. a toujours pour intégrale $\frac{Ax + By + Cz + Du + \&c}{m+1}$, il est évident qu'on trouvera l'intégrale de ces sortes de différentielles en substituant au lieu de dx, dy, dz, &c. les variables x, y, z, &c. & divisant le résultat par le nombre qui désigne le degré de dimension de cette fonction ainsi réduite. Donc si V est une fonction homogene des variables x, y, z; de sorte que l'on ait $dV = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, on aura $V = \frac{Ax + By + Cz}{n}$, n étant la dimension homogene de cette fonction. Or il est visible qu'en substituant x, y, z, au lieu de dx, dy, dz, le degré de dimension n'a pu augmenter que d'une unité; donc $m + 1 = n$.

Soit la différentielle $dV = 2x\,dx . L.\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(y\,dx - x\,dy)}{y^2 - xx}$, dans laquelle il n'y a aucune lettre constante, l'on aura en substituant x au lieu de dx, y au lieu de dy, & divisant par 2, parce que la dimension réduite est du second degré, $V = xx . L. \frac{y+x}{y-x}$. On peut voir, par cet exemple, qu'il est facile, en suivant cette méthode, d'intégrer toutes les différentielles de cette espece, & d'un nombre quelconque de variables, ce qui feroit souvent très-difficile par d'autres méthodes.

Lorsque V sera une fonction de la seule variable x, les corollaires précédens pourront

avoir lieu, en suppoſant même que cette fonction eſt de cette forme $V = ax^m L. x$. En effet ſi l'on ſuppoſoit $dV = ax^2 L. x. dx$, l'on auroit, ſelon la méthode expliquée, $V = \frac{ax^3 L.x}{4}$. Ce qui eſt vrai, car la différentielle de $\frac{ax^3 L.x}{4}$ eſt $\frac{3ax^2 L.x}{4} + \frac{ax^2 dx}{4} = ax^2 L.x.dx$.

125. PROBLEME. *Séparer les variables de l'équation* $dy(y - x) = \frac{mdx(1+yy)\sqrt{(1+yy)}}{\sqrt{(1+xx)}}$.

Suppoſons $y = \frac{x-u}{1+xu}$, l'on aura $y - x = \frac{-u(1+xx)}{1+xu}$, $1+yy = \frac{(1+xx).(1+uu)}{(1+xu)^2}$, & $dy = \frac{dx(1+uu) - du(1+xx)}{(1+xu)^2}$. En ſubſtituant ces valeurs dans la propoſée, elle devient $-udx(1+uu)+udu(1+xx) = mdx(1+uu)\sqrt{(1+uu)}$; d'où l'on tire $\frac{dx}{1+xx} = \frac{udu}{(1+uu)\left(m\sqrt{(1+uu)}+u\right)}$, équation ſéparée. Si dans cette équation l'on fait $1+uu = tt$, l'on aura $\frac{dx}{1+xx} = \frac{dt}{t\left(mt+\sqrt{(tt-1)}\right)}$, & faiſant dans celle-ci $t = \frac{1+zz}{2z}$, l'on a $\frac{dx}{1+xx} = -$

$\frac{2dz(1-zz)}{(1+zz)(m+1+(m-1)zz)}$; équation dont chaque membre s'integre par la méthode des fractions rationnelles à une seule variable; il est donc facile d'intégrer l'équation proposée. En effet lorsqu'on aura trouvé une valeur de z, on aura celle de t, ensuite celle de u, & enfin celle de y.

126. PROBLÊME. *Rendre homogene l'équation* $dx(a+bx+cy)=(f+x+hy)dy$ *qui peut être regardée comme l'équation générale du premier ordre* * *& à deux variables.* Je fais $a+bx+cy=t$, $f+x+hy=u$, pour avoir $tdx=udy$; or la substitution donne $x=\frac{ht-cu+ah+cf}{bh-c}$ & $y=\frac{bu-t+a-bf}{bh-c}$; d'où l'on titre en différentiant, $dx:dy::hdt-cdu:bdu-dt$; mais l'équation $tdx=udy$, donne $dx:dy::u:t$, donc $u:t::hdt-cdu:bdu-dt$, ou $dt(ht+u)=du(bu+ct)$, équation homogene dont on peut par conséquent séparer les indéterminées. Si l'on suppose $bh-c=0$, x & y seront infinis & dans ce cas la méthode qu'on vient d'employer est inutile. Mais alors l'on a $bh=c$, $\frac{bh}{c}=1$. Donc si l'on fait $m=\frac{h}{c}$, l'équation proposée

* Car si le terme où x se trouve sans coefficient, avoit un coefficient, en divisant toute l'équation par ce coefficient, on lui donneroit la forme de la proposée.

pourra dans ce cas se réduire à cette forme, $a\,dx + dx(bx + cy) = f\,dy + m(bx+cy)\,dy$. Et supposant $bx + cy = z$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{a + (bx + cy)}{f + m(bx + cy)} = \frac{a + z}{f + mz}$. De plus $dy = \frac{dz - b\,dx}{c}$; donc $dy = \frac{(a + z)\,dx}{f + mz} = \frac{dz - b\,dx}{c}$; & $dx = \frac{dz(f + mz)}{ac + bf + (c + mb)z}$, équation séparée. Ainsi l'équation générale du premier ordre ne peut être rendue homogene dans les cas où l'on a $bh = c$, mais alors elle peut être séparée.

Si l'on vouloit intégrer l'équation homogene $(z + au).dz + (bz + cu).du = 0$, sans séparer les indéterminées, on le pourroit facilement, car selon ce qu'on a dit ci-dessus (122), lorsque les variables sont x, y, z, &c. le facteur P est dans ces sortes d'équations $= \frac{1}{Ax + By + Cz + \&c.}$, & par conséquent dans le cas présent $= \frac{1}{Ax + By} = \frac{1}{z(z + au) + u(bz + cu)}$, en changeant x en z & y en u.

Si l'on avoit $Ax + By = 0$, le facteur P seroit infini. Par exemple, dans l'équation $y\,dx - x\,dy = 0$, le facteur $\frac{1}{Ax + By}$ est $= \frac{1}{xy - xy} = \frac{1}{0 \times yx} = \infty$. On pourra néanmoins intégrer dans ce cas en prenant un multiple fini de ce facteur. Supposons qu'on

prenne pour multiplicateur de la propofée la quantité $x^0 y^2$ (*), la différentielle complette fera $= \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ dont l'intégrale $= \frac{x}{y}$. Si l'on prenoit le multiplicateur $\frac{1}{xy}$, l'on auroit $\frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale eft $= L.x - L.y = L.\frac{x}{y}$.

127. PROBLÈME. *Trouver les conditions que doivent avoir les expofans des variables dans les équations différentielles à deux variables feulement pour qu'on puiffe les rendre homogenes par la fubftitution de* z^h *au lieu de* y, *h étant un expofant indéterminé.* 1°. Lorfque les équations n'ont que trois termes, on peut les repréfenter par cette formule générale $a y^n x^m dx + b y^q x^p dx + c x^r y^s dy = 0$, les expofans des variables étant des nombres quelconques, ou o. Puifque nous fuppofons $y = z^h$, nous aurons $dy = h z^{h-1} dz$, $y^n = z^{nh}$, $y^q = z^{qh}$, $y^s = z^{hs}$, & notre équation deviendra $a z^{nh} x^m dx + b z^{hq} x^p dx + ch x^r z^{hs+h-1} dz = 0$. Pour que cette equation foit homogene, il faut que la fomme des expofans foit la mêmedans chaque terme ; donc on doit

* En regardant o comme une quantité a infiniment petite, l'on a $a.xy = 0.xy$, & multipliant $\frac{1}{a.xy}$ par $a.xy^3$, l'on a $x^0 y^2 = y^2$.

avoir ces deux équations $nh + m = hq + p$, & $nh + m = r + hs + h - 1$. La premiere donne $h = \frac{p-m}{n-q}$, & en substituant cette valeur de h dans la seconde, on trouvera $(s - q + 1) \times (p - m) = (p - r + 1) . (n - q)$, équation qui exprime la condition que doivent avoir les exposans de la proposée pour qu'on puisse la rendre homogene par la supposition de $y = z^h$, h étant $= \frac{p-m}{n-q}$.

Cette substitution est cependant impossible lorsque $p = m$, ou $n = q$; mais alors on peut séparer facilement les indéterminées : car si $p = m$, l'on aura (en substituant m au lieu de p, divisant ensuite par x^r & par $(ay^n + by^q)$, $x^{m-r}dx + \frac{cy^s dy}{ay^n + by^q} = 0$. Si $n = q$ en divisant par x^r, & par y^n, la proposée devient $ax^{m-r}dx + bx^{p-r}dx + cy^{s-n}dy = 0$.

2°. Si les équations ont quatre termes, on peut toujours les représenter par cette formule $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy + fx^t y^u dy = 0$, la supposition de $y = z^h$ donnera $az^{nh}x^m dx + bz^{hq}x^p dx + chx^r z^{hs+h-1}dz + fhx^t \times z^{hu+h-1} = 0$.

Pour que cette équation soit homogene, il est nécessaire que l'on ait les trois équations $hn + m = hq + p = r + hs + h - 1 = t + hu + h - 1$. La première donne $h = \frac{p-m}{n-q}$; la seconde équation $hq + p = t + hu + h - 1$, en

ſubſtituant la valeur de h & réduiſant, donne $(p - r + 1).(n - q) = (s - q + 1).(p - m)$ pour la première condition des expoſans. L'équation $hq + p = t + hn + h - 1$, après la ſubſtitution de la valeur de h & la réduction, donne $(p - t + 1).(n - q) = (u - q + 1).(p - m)$ pour la ſeconde condition des expoſans; & s'ils ont ces deux conditions, l'équation de quatre termes, devindra homogene par la ſuppoſition de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. On trouvera de la même manière que les expoſans doivent avoir trois conditions pour les équations à cinq termes, quatre conditions pour les équations à ſix termes & ainſi de ſuite; deſorte que le nombre des termes étant N, le nombre des équations de condition ſera N $-$ 2.

Pour ſçavoir ſi l'équation de trois termes $4y^3 x^{\frac{1}{2}} dx + 3y^2 dx - bx^{\frac{1}{2}} dy = 0$, peut devenir homogene en faiſant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. Je remarque que l'on a ici $n = 3$, $m = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $p = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $s = 0$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation de condition, on trouve qu'elle eſt vraie: car l'on a $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$, ou $(0 - 2 + 1) \times (0 - \frac{1}{2}) = (0 - \frac{1}{2} + 1).(3 - 2)$, ou $-1 \times - \frac{1}{2} = + \frac{1}{2}. + 1$, ou $+ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; donc en faiſant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$, l'équation propoſée deviendra homogene. En effet l'on aura $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $y^2 = z^{-1}$ & $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$. Donc en ſubſti-

tuant ces valeurs dans la proposée, l'on aura
$4z^{-\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}}dx + 3z^{-1}dx + 3x^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{3}{3}}dx = 0$; équation homogene.

128. PROBLÊME. *Séparer les indéterminés dans l'équation différentielle à deux variables* $apy^n dy + by^{n+1}p' dx + cy^q p'' dx = 0$, *dans laquelle* p, p', p'' *sont des fonctions de* x *sans* y. 1°. En divisant la proposée par y^q & par ap, il vient

$$y^{n-q}dy + \frac{by^{n-q+1}p'dx}{ap} + \frac{cp''dx}{ap} = 0,$$

dans laquelle le premier & le dernier terme ne contiennent chacun qu'une seule variable.

Maintenant il est visible que si on pouvoit trouver une fonction V de x sans y, telle qu'en multipliant cette équation ainsi réduite, elle rendît les deux premiers termes une différentielle exacte, on trouveroit l'intégrale en prenant celle des deux premiers termes & celle du terme $\frac{cVp''dx}{ap}$. Le premier terme après la multiplication, sera $= Vy^{n-q}dy$, & le second sera $= \frac{by^{n-q+1}Vdx}{ap}$; & la différentielle exacte sera $A\,dx + B\,dy$, en faisant le multiplicateur $\frac{by^{n-q+1}V}{ap} = A$; & $Vy^{n-q} = B$. Il faut donc (88), que l'on ait $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou $\frac{(n-q+1).bVp'y^{n-q}}{ap} = \frac{y^{n-q}dV}{dx}$; donc $\frac{(n-q+1)bp'dx}{ap} = \frac{dV}{V}$;

& en intégrant, L. V $= S. \frac{(n-q+1)bp'dx}{ap}$ $= S. \frac{(n-q+1)bp'dx}{ap}$. L. e (e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$) $= L. e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}}$ en faisant $n - q + 1 = g$; donc en repassant des logarithmes aux nombres, $V = e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}}$. Or $e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}}$ dépend de l'intégration des différentielles à une seule variable; ainsi l'on peut supposer V connue.

Si l'on substitue cette valeur de V dans l'équation $V y^{n-q} dy + \frac{by^g V p' dx}{ap} + \frac{cVp''dx}{ap} = 0$, les deux premiers termes deviendront une différentielle exacte, qu'on trouvera en intégrant le premier terme dans la supposition de y seul variable; mais l'intégrale de ce premier terme dans cette supposition, est $= \frac{Vy^{n-q+1}}{n-q+1} = \frac{Vy^g}{g}$; donc l'intégrale de toute l'équation sera $\frac{Vy^g}{g} + S. \frac{cVp''dx}{ap} = C$. En substituant la valeur de V, on aura $\frac{y^g}{g}. e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}} + S. \left(\frac{cp''dx}{ap}. e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}}\right)$ $= C$, multipliant tout par g, divisant par $e^{S. \frac{gbp'dx}{ap}}$, transposant le second terme;

& prenant la racine g, il vient $y =$
$$\left(gC.e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}} - S.\left(\frac{gcp''dx}{ap}.e^{S.\frac{gbp'dx}{ap}}\right)e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}}\right)^{\frac{1}{g}};$$
les indéterminées feront donc toujours séparées & l'équation intégrée par cette méthode. Si g, ou $n-q+1$ étoit $=0$, la méthode paroîtroit ne rien donner; mais dans ce cas on auroit $n-q=-1$, & la proposée se réduiroit à $\frac{dy}{y}+\frac{bp'dx}{ap}+\frac{cp''dx}{ap}=0$, dont l'intégrale est $L.y+\frac{b}{a}S.\frac{p'dx}{p}+\frac{c}{a}.S.\frac{p''dx}{p}=C.$

129. LEMME. *Toutes les équations à deux variables & à trois termes, peuvent se réduire à cette forme* $dy = ax^m dx + by^q dx$. Puisque ces équations ont deux termes où se trouve la différentielle d'une variable & un terme qui renferme la différentielle de l'autre variable, il est visible qu'elles peuvent être représentées par l'équation $Az^e u^f du = Bu^g z^h dz + Cu^r z^s dz$. Divisant tout par Az^e & par u^g on la réduit à celle-ci $u^{f-g}du = \frac{B}{A}z^{h-e}dz + \frac{C}{A}u^{r-g}z^{s-e}dz$, qu'on peut exprimer ainsi: $u^{a'}du + Ez^{b'}dz + Fu^{c'}z^{e''}dz$. Faisant maintenant $u = y^{\frac{1}{a'+1}}$, l'on aura $u^{a'}du = \frac{dy}{a'+1}$. En substituant la valeur de u & de $u^{a'}du$, & multipliant par $a'+1$, l'on a $dy = (a'+1)Ez^{b'}dz$

$+(a'+1)Fy^{\frac{e'}{a'+1}}z^{c''}dz$, qu'on peut exprimer ainsi $dy = Gz^{b'}dz + Hy^{q}z^{c''}dz$. Suppofant $x = z^{c''+1}$, ou $z = x^{\frac{1}{c''+1}}$, on en tirera $z^{c''}dz = \frac{dx}{c''+1}, dz = \frac{1}{c''+1}.x^{\frac{1}{c''+1}-1}dx$, & fubftituant ces valeurs de z & de dz, notre équation deviendra $dy = \frac{G}{c''+1} \times x^{\frac{b'-c''}{c''+1}}dx + \frac{H}{c''+1}.y^{q}dx$, qu'on peut exprimer par $dy = ax^{m}dx + by^{q}dx$.

130. PROBLÊME. *Une équation différentielle quelconque à deux variables & à trois termes étant donnée, féparer les indéterminées pour l'intégrer enfuite, ou l'intégrer en les féparant.* On pourra toujours réduire la propofée à la forme $dy = ax^{m}dx + by^{q}dx$, comme on vient de le démontrer, & on pourra réfoudre cette équation comme il fuit:

1°. Si $m = 0$. l'équation fera $dy = adx + by^{q}dx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{a+by^{q}} = dx$, équation féparée.

2°. Si $q = \frac{m}{m+1}$, on fera $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, ou $x^{m} = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1}z^{\frac{-m}{m+1}}dz$, & en fubftituant les valeurs de x, de dx & de q, l'équation deviendra

dy

$$dy = \frac{adz}{m+1} + \frac{b}{m+1} \cdot y^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz,$$

ou $(m+1) . z^{\frac{m}{m+1}} dy = a z^{\frac{m}{m+1}} dz + b y^{\frac{m}{m+1}} dz$, qui est homogene, & dont par conséquent on peut séparer les indéterminées.

3°. Si $q = 1$, on pourra mettre la proposée sous cette forme $- y^0 dy + f x^m y^0 dx + k y^1 dx = 0$, & la comparer avec la formule du problême précédent, ce qui donnera $a = -1$, $n = 0$, $p = x^0 = 1$, $c = f$, $q = 1$, $b = k$, $p' = x^0 = 1$, $p'' = x^m$, & en substituant ces valeurs dans l'intégrale qu'on a trouvée dans ce problême, l on aura l'intégrale cherchée. A cause de $p = x^0 = p' = 1$, l'on aura le facteur V du problême précédent $= e^{S. \frac{gkdx}{a}} = e^{\frac{gkx}{a}}$.

4°. Enfin on peut toujours intégrer l'équation proposée en séparant en même tems les indéterminées, quels que soient les exposans m & q, on peut même trouver une infinité de suites qui exprimeront la valeur de y en x, en laissant l'exposant m indéterminé & prenant un nombre quelconque 1, 2, 3, &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. pour l'exposant q; il est même facile d'avoir la valeur de y en laissant cet exposant indéterminé. Puisque $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S. by^q dx$ en ajoutant la constante C, on pourra trouver une infinité de suites qui donneront la valeur de y en x.

131. Soit l'équation qu'on appelle *du Comte Ricati* $dy = ax^m dx + by^2 dx$; en intégrant de part & d'autre, il vient $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^2 dx$. Supposant maintenant que la série qui doit exprimer la valeur de y en x, soit $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + p$, on aura $y^2 = \frac{a^2 x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{2ax^{m+1}p}{m+1} + p^2$, & la différentielle $by^2 dx = \frac{ba^2x^{2m+2}dx}{(m+1)^2} + \frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + bp^2dx$, & en intégrant de part & d'autre, on trouvera $S.\,byydx = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + S.\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + S.\,bp^2dx$, & par conséquent $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + S.\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + S.\,bppdx$. Si l'on suppose maintenant $p = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + p'$; en substituant cette valeur de p dans les différentielles $\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1}$, & $bppdx$, on trouvera en prenant les intégrales, d'autres termes de la suite cherchée. On ne doit pas oublier d'ajouter une constante.

On peut aussi employer les rectangles de Newton, & il est aisé de voir que la méthode dont nous venons de faire usage fournit généralement la séparation aussi bien que l'intégration.

132. Il y a une infinité de valeurs de m dans lesquelles l'équation de Ricati peut être séparée. Pour le faire voir représentons cette équation par la formule $dy + ay^2 dx = bx^m dx$; a & b étant des quantités positives ou négatives *. 1°. Si $m = 0$, l'on aura $dy + ayydx = bdx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{b - ayy} = dx$, équation séparée. 2°. Supposons $y = \frac{c}{z}$, l'on aura $dy = -\frac{cdz}{zz}$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, & ôtant les fractions l'on trouvera $-cdz + accdx = bx^m zzdx$, dans laquelle faisant $t = x^{m+1}$ pour avoir $x^m dx = \frac{dt}{m+1}$, & $dx = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}} dt}{m+1}$, il viendra en transposant & changeant ensuite tous les signes, $cdz + \frac{bzzdt}{m+1} = \frac{acct^{\frac{-m}{m+1}} dt}{m+1}$, qui, en divisant par c & supposant $\frac{b}{m+1} = a'$ & $\frac{acc}{m+1} = b'$, devient $dz + a'zzdt = b't^n dt$ (en faisant encore $\frac{-m}{m+1} = n$), équation qui a la même forme que la proposée & qui

* Si dans l'équation du problême le coefficient de $y^2 dx$ est positif, rien n'empêche de le supposer maintenant négatif.

par conséquent doit admettre la séparation dans les mêmes cas. De-là il suit que si la proposée est séparable lorsque $m = n$, elle le sera aussi lorsque $m = \frac{-n}{n+1}$.

Supposons $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, pour avoir $dy = -\frac{dx}{xx} - \frac{dz}{xx} + \frac{2zdx}{x^3}$. Si l'on substitue ces valeurs de dy & de y, l'on aura en multipliant par $-xx$, $dz - \frac{azzdx}{xx} = -bx^{m+2}dx$. Maintenant si l'on fait $x = \frac{1}{t}$, il viendra $dz + azzdt = bt^{-m-4}dt$, qui est semblable à la proposée. Donc si la séparation réussit lorsque $m = n$, elle réussira aussi lorsque l'on aura $m = -n - 4$. Ainsi du cas $m = n$ il s'en suit les deux cas ; sçavoir, $m = \frac{-n}{n+1}$, & $m = -n - 4$, & comme d'ailleurs la séparation réussit lorsque $m = 0$, ou lorsque $m = n = 0$, en employant alternativement ces formules, l'on a $m = -4$; $m = \frac{-4}{3}$; $m = -\frac{8}{3}$, $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$ $m = -\frac{16}{7}$, &c. Ces cas sont compris généralement dans la formule $m = \frac{-4P}{2P \pm 1}$, P étant un nombre entier positif quelconque ou o.

Mais pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, voici comment je raisonne : Dans la formule de Ricati les indéterminées sont sépa-

rables lorſque $m = 0$, premier cas : & de-là il ſuit que la même choſe a lieu lorſque $m = \frac{-n}{n+1}$, ſecond cas. De plus la ſéparation réuſſit lorſque $m = n$; elle réuſſira donc auſſi lorſque $m = -n -4$, troiſième cas. Si $m = 0$, l'on aura le cas de ſéparabilité. 1°. Si $m = 0 = n$. 2°. Si $n = 0$, l'on a alors $m = -4$: car par la troiſième formule $m = -n - 4$. 3°. Si $m = n = -4$, la formule $m = \frac{-n}{n+1}$ donne $\frac{+4}{-4+1} = \frac{-4}{3}$. Si maintenant $m = n = \frac{-4}{3}$, la formule $m = -n - 4$ donne $\frac{+4}{3} - 4 = \frac{+4-12}{3} = \frac{-8}{3}$. Si $m = \frac{-8}{3} = n$, la formule $m = \frac{-n}{n+1}$ fait voir que la ſéparation aura encore lieu ſi l'on diviſe $-\frac{8}{3}$ par $n + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = \frac{-8+3}{3} = -\frac{5}{3}$, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $m = -\frac{8}{5}$, &c.

L'équation $dy + fyyz^t dz = gz^r dz$ ſe réduit facilement à la formule de Ricati de la maniere ſuivante : je change f en a, & je fais $z^t dz = dx$, ou $x = \frac{z^{t+1}}{t+1}$, ou $z^{t+1} = (t+1)x$; alors $z = \left((t+1)x\right)^{\frac{1}{t+1}} = (h.x)^n$ en faiſant $t+1$

$= h$ & $\frac{1}{t+1} = n$; donc $dz = nhdx(hx)^{n-1}$, & $gz^p dz = gnh^n (h.x)^{pn+n-1} dx = bx^m dx$, en faisant $gnh^n = b$, & $pn + n - 1 = m$; donc en substituant, l'on aura $dy + ayydx = bx^m dx$. Ainsi l'équation dont on vient de parler, admettra la séparation des indéterminées dans les mêmes cas que celle de Ricati.

Si l'on suppose que P soit un nombre infiniment grand, $m = \frac{-4P}{2P \pm 1}$ devient $= -2$, & l'équation de Ricati prend la forme $dy + ayydx = \frac{bdx}{xx}$, & faisant $y = \frac{1}{z}$, l'on a $dy = -\frac{dz}{zz}$, $yy = \frac{1}{zz}$, & l'équation devient $-\frac{dz}{zz} + \frac{adx}{zz} = \frac{bdx}{xx}$, équation homogene, & qui par conséquent admet la séparation des indéterminées.

Supposons $y = Ax^p + tx^q$, en substituant les valeurs de yy & de dy que donne cette supposition, dans l'équation de Ricati, elle deviendra $pAx^{p-1} dx + qx^{q-1} tdx + x^q dt + ax^{2q} tt dx + aAAx^{2p} dx + 2aAx^{p+q} tdx = bx^m dx$. Supposons maintenant $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$; $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$, l'on aura $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$. Donc en effaçant les termes qui sont

égaux à o, l'on aura la transformée $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^{m}dx$ (B).

Si l'on suppose $m = -4$, ayy, qui est ici représenté par att, & b seront multipliés par une même puissance de x ; or alors les variables peuvent être séparées. En effet représentez -4 par m, l'équation deviendra $x^{-2}dt = bx^{m}dx - attx^{m}dx$, & supposant $m + 2 = n$, on aura en multipliant par x^{2}, $dt = bx^{n}dx - attx^{n}dx$, ou $\frac{dt}{b-att} = x^{n}dx$, équation où les indéterminées sont séparées.

Soit de plus supposé $t = \frac{1}{z}$, l'équation B deviendra $dz + bx^{m+2}zzdx = ax^{-4}dx$, & supposant $z = A^{I}x^{p'} + x^{q'}t^{I}$, on aura, en opérant comme ci-devant, $p^{I}A^{I}x^{p'-1}dx + q^{I}x^{q'-1}t^{I}dx + x^{q'}dt^{I} + bx^{2q+m+2}t^{I}t^{I}dx + bA^{I}A^{I}x^{2p'+m+2}dx + 2b + A^{I}x^{p'+q'+m+2}t^{I}dx = ax^{-2}dx$. Supposant maintenant $2p^{I} + m + 2 = p^{I} - 1$, $p^{I}A^{I} + bA^{I}A^{I} = 0$, $q^{I} + 2bA^{I} = 0$, $q^{I} - 1 = p^{I} + q^{I} + m + 2$; l'on trouvera $p^{I} = -m - 3$, $A^{I} = \frac{m+3}{b}$, $q^{I} = -2m - b$; & la seconde transformée sera après avoir multiplié par x^{2m+6}, $dt^{I} + bx^{-m-4}t^{I}t^{I}dx = ax^{2m+4}dx$. Cette équation admettra la séparation si $-m - 4 = 2m + 4$, ou si $-8 = 3m$, ou si $m = \frac{-8}{3}$. Si on suppose de nouveau $t^{I} = \frac{1}{z^{I}}$, & $z^{I} = A^{II}x^{p''} + x^{q''}t^{II}$,

on trouvera que l'équation eſt ſéparable ſi $m = \frac{-12}{5}$, & l'on pourra en continuant les ſubſtitutions, trouver de nouvelles valeurs de m qui rendront l'équation ſéparable.

Dans la première ſubſtitution on a $y = Ax^p + x^q t$, & $p = -1$, $q = -2$; dans la ſeconde ſubſtitution, on a $p' = -m - 3$, $q' = -2m - 6$, & ainſi de ſuite, de ſorte que l'expoſant qui repréſente q eſt toujours double de l'expoſant qui repréſente p; donc l'expoſant p étant $-Pm - 2P - 1$, l'expſant q ſeroit $-2Pm - 4P - 2$. Donc en reprenant les ſubſtitutions précédentes & ſubſtituant les valeurs de t, z', t', &c. l'on aura $y = Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \frac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6}} \cdot \frac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4-10}}$ &c. $\times t$, t étant une variable qu'on détermine par la ſubſtitution dans les équations ſéparées, t eſt le multiplicateur du ſecond terme du dernier facteur. Si l'on ſuppoſe $m = \frac{-4P}{2P-1}$, il faudra continuer juſqu'au facteur dans lequel le premier terme en x aura pour expoſant $-Pm - 2P - 1$, le ſecond terme étant $x^{-2Pm-4P-2} t$. Si on ſubſtituoit $\frac{1}{z}$ au lieu de y, enſuite $Ax^p + x^q t$ pour z &c. on trouveroit les autres valeurs de m qui répondent à $\frac{-4P}{2P+1}$, & la valeur générale de y ſera $y = \frac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-2}} \cdot \left(\frac{1}{A'x^{-2m-3} + x^{-4m-6}}\right)$ &c.

en continuant de même juſqu'à ce que le premier terme en x dans le dénominateur ſoit $x^{-m(p+1)-2p-1)}$, alors le ſecond terme ſera $x^{-(2m+2)(p+1)-2}t$.

133. REMARQUE. Il ne faut pas confondre la ſéparation des variables avec l'intégration ; c'eſt-à dire, qu'on ne doit pas regarder une différentielle comme n'étant pas intégrable parce qu'on n'en peut pas ſéparer les indéterminées. Car dans les cas que l'équation de Ricati n'admet pas la ſéparation, on peut l'intégrer, ainſi qu'on l'a vu précédemment, & on auroit tort de l'abandonner comme on a accoutumé de le faire. On peut auſſi intégrer uu grand nombre de différentielles ſans avoir recours à la méthode de ſéparation.

Si l'on avoit, par exemple, l'équation $ydx = xdx - xdy$, cette équation n'eſt pas intégrable dans l'état où elle eſt ; mais en tranſpoſant le terme xdy, elle devient $ydx + xdy = xdx$, dont l'intégrale eſt $xy = \frac{xx}{2} + C$. L'équation $ydx = xdx + x$[illegible] deviendra intégrable en tranſpoſant le terme xdy & diviſant par x^2 ; car l'on aura $\frac{ydx - xdy}{xx} = \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale eſt $\frac{y}{x} = L.x.$

Soit l'équation $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dz$, j'ajoute au numérateur deux termes qui ſe détruiſent $2xdx -$

$2xdx$, & j'ai $\frac{2xdx - 2ydx - 2xdx + 2xdy}{(x-y)^2}$ $= dz$. L'intégrale eſt donc $\frac{2x}{x-y} = z$.

Soit la différentielle $x^2 dx^2 + xydxdy = a^2 dy^2$, en ajoutant de part & d'autre $\frac{y^2 dy^2}{4}$, l'on aura $x^2 dx^2 + xydxdy + \frac{y^2 dy^2}{4} = a^2 dy^2 + \frac{y^2 dy^2}{4}$. Prenant la racine quarrée, il vient $xdx + \frac{ydy}{2} = \frac{dy}{2} \sqrt{(4aa + y^2)}$. L'intégrale du premier membre eſt facile à trouver, & celle du ſecond ſe trouve par les ſéries.

Si l'on avoit l'équation $x^2 dy + 2xydy + y^2 dy = b^2 dx$, en ajoutant $b^2 dy$ de part & d'autre, l'on auroit $x^2 dy + 2xydy + y^2 dy + b^2 dy = b^2 (dx + dy)$; donc en diviſant, $dy = \frac{b^2 (dx + dy)}{(x+y)^2 + b^2} = \frac{b^2 dz}{z^2 + b^2}$ (en faiſant $x + y = z$). L'intégrale du ſecond membre de cette équation eſt un arc de cercle dont le rayon $= b$ & la tangente $= z = x + y$.



DE LA DEMI-SÉPARATION DES INDÉTERMINÉES ET DE QUELQUES AUTRES MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRAL.

134. Nous ne connoiſſons point de méthode générale pour ſéparer les indéterminées dans une équation donnée, lors même que cette ſéparation eſt poſſible, ſoit en la rendant homogene, ou ſans la rendre homogene. Pour la rendre homogene, on peut eſſayer d'égaler une des variables où même une fonction de deux variables à une fonction d'une nouvelle variable avec des expoſans indéterminés qu'on détermine dans la ſuite par la condition que la transformée doit être homogene.

La méthode de la demi-ſéparation eſt due au Comte Jacques Ricati. Dans cette méthode, on diſtribue l'équation de manière qu'il en réſulte une eſpèce de demi-ſéparation, en rejettant dans les multiplicateurs ou diviſeurs communs, les quantités qui empêchent la ſéparation; on égale enſuite l'intégrale des termes ſéparés à une nouvelle variable; & par le moyen de cette ſubſtitution on chaſſe une des indéterminées de l'équation propoſée. Après l'opération il arrive ſouvent que les indéterminées ſont ſéparées dans l'équation réſultante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a + x + y} = dz$, z étant une fonction de y ſans x. Le numérateur étant intégrable, je regarde le dénominateur comme un diviſeur commun de tous les termes du numérateur, & je ſuppoſe $2y\,dy + x\,dy + y\,dx = a\,du$; donc $y^2 + xy = au$, & $x = \frac{au - yy}{y}$. Donc notre équation deviendra $\frac{a\,du}{a + \frac{au - yy}{y} + y} = dz$, ou $\frac{y\,du}{y + u} = dz$; d'où l'on tire $ydu - udz = ydz$, ou en diviſant par y & prépa-

rant l'équation, $u\left(\frac{du}{u}-\frac{dz}{y}\right)=dz$. Faisons $\frac{dz}{y}=\frac{dt}{t}$; t sera une fonction de y, & l'équation deviendra $u\left(\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}\right)=dz$. Supposons enfin $\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}=\frac{dp}{p}$, l'on aura $L.u-L.t=L.p$, ou $L.\frac{u}{t}=L.p$, ou $\frac{u}{t}=p$, ou $u=pt$. Mais $u.\left(\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}\right)=dz$, & $\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}=\frac{dp}{p}$; donc en substituant, $pt.\frac{dp}{p}=dz$. ou $tdp=dz$, ou $dp=\frac{dz}{t}$, mais t & z sont des fonctions de y; donc l'équation est séparée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $-Ady+aBxxdy=xdx$, A & B étant des fonctions quelconques de y sans x, je la dispose ainsi $-Ady=x^2.\left(\frac{dx}{x}-aBdy\right)$. Faites $aBdy=\frac{dz}{z}$, afin que z soit une fonction de y, il viendra $-Ady=xx.\left(\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z}\right)$. Faisant $\frac{x}{z}=\frac{t}{b}$, & éliminant x, il vient $-Ady=\frac{t^2z^2dt}{bbt}$, ou $-\frac{b^2Ady}{z^2}=tdt$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque A & z sont des fonctions de y.

EXEMPLE III. Soit la formule $-\frac{a^3dx}{x}+bydx=aydy$. Je la prépare de cette maniere $y.(bdx-ady)=\frac{a^3dx}{x}$ (A). Je suppose maintenant $bdx-ady=adz$; donc $bx-ay=az$, & $y=\frac{bx-az}{a}$. Substituant

cette valeur de y & celle de $bdx - ady$ dans l'équation A, l'on trouve $bxdz - azdz = \frac{a^3dx}{x}$, ou $bxdz = \frac{a^3dx}{x} + azdz$. Je fais $zdz = \frac{aadt}{t}$ pour avoir $bxdz = aa.\left(\frac{adx}{x} + \frac{adt}{t}\right)$ (B). Faisant enfin $\frac{adx}{x} + \frac{adt}{t} = \frac{adu}{u}$, il vient en intégrant, $a(lx + lt) = alu$, ou a L. $xt = a$ L. u, ou L. $xt =$ L. u, ou $xt = u$, & $x = \frac{u}{t}$. Substituant $\frac{u}{t}$ & $\frac{adu}{u}$ à la place de leurs valeurs, l'équation B devient $\frac{budz}{t} = \frac{a^3du}{u}$, ou $\frac{bdz}{t} = \frac{a^3du}{uu}$; équation dont les indéterminées sont séparées, puisque t est une fonction de z.

EXEMPLE IV. Soit maintenant l'équation $\frac{2x^2dx + xydy + y^2dx}{x^4 + x^2y^2 + a^4} = \frac{xdx + ydy}{aa.\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Le second membre est intégrable, & en faisant $x^2 + y^2 = zz$, il se change en $\frac{dz}{aa}$; de plus cette supposition donne $ydy = zdz - xdx$. Donc en substituant dans le premier membre de l'équation les valeurs de y^2 & de ydy, & changeant le second membre en $\frac{dz}{aa}$, l'on aura, toute réduction faite, $\frac{xzdz + z^2dx}{z^2x^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$. Pour préparer cette équation on l'écrira ainsi $\frac{z}{z^2x^2 + a^4}.(xdz + zdx) = \frac{dz}{a^2}$. Je fais $xdz + zdx = adt$, & en intégrant, $xz =$

at; donc $x = \frac{at}{z}$; donc en éliminant x, l'équation préparée devient $\frac{z\,dt}{at^2 + a^3} = \frac{dz}{a^2}$, ou $\frac{a\,dt}{t^2 + a^2} = \frac{dz}{z}$, dont l'intégrale est $\frac{b}{a} = \text{L}.\, z$, b étant un arc de cercle dont la tangente $= t$ & le rayon $= a$.

135. Parlons maintenant d'un autre artifice dont se sert Jean Bernouilli dans les actes de Léipsic 1697, en faisant une des variables de l'équation égale au produit de deux autres variables indéterminées, (produit qu'on divise par une constante a pour conserver l'homogénéité) : ainsi, par exemple, on suppose $y = \frac{p \cdot q}{a}$, p & q étant deux nouvelles variables. En éliminant y par cette substitution, on détruit quelques termes de l'équation qui en résulte, de manière que l'on puisse séparer les indéterminées dans les termes qui restent.

EXEMPLE I. Soit l'équation $aydy = y^2dx + x^2dx$, faites $y = \frac{pq}{a}$, ayant fait la substitution, on aura une nouvelle équation $aq^2pdp + ap^2qdq = p^2q^2dx + a^2x^2dx$. En supposant égaux les termes aq^2pdp, p^2q^2dx, l'on aura $\frac{adp}{p} = dx$, & $a\,\text{L}.\,p = x$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $ap^2qdq = a^2x^2dx$, ou $p^2qdq = ax^2dx$, ou $qdq = \frac{ax^2dx}{p^2}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque p est une fonction de x.

EXEMPLE II. Soit l'équation $dy = \frac{yxdy}{xx - aa} - \frac{y^3dx}{x^3}$. En faisait $y = \frac{pq}{a}$, on aura la nouvelle équation $q\,dp$

$+ p\,dq = \frac{pqx\,dx}{xx-aa} - \frac{p^3q^3\,dx}{a^2x^3}$. Je fais $q\,dp = \frac{pqx\,dx}{xx-aa}$, d'où je tire $\frac{dp}{p} = \frac{x\,dx}{xx-aa}$, & en intégrant, $L.p = L.\sqrt{(xx-aa)}$ ou $p = \sqrt{(xx-aa)}$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $p\,dq = \frac{-p^3q^3\,dx}{a^2x^3}$, ou $-\frac{a^3\,dq}{q^3} = \frac{ap^2\,dx}{x^3} = \frac{ax^2dx - a^3dx}{x^3} = \frac{a\,dx}{x} - \frac{a^3\,dx}{x^3}$, équation dans laquelle les variables sont séparées.

Mais cette méthode ne réussit que dans les équations dans lesquelles on peut mettre dy dans un seul terme, y dans l'autre terme & y^m dans le troisième terme, m étant un exposant quelconque. On sent bien que ce qu'on dit de y doit s'entendre d'une autre variable pour laquelle on pourroit faire une semblable disposition.

136. Les substitutions sont utiles pour ramener plusieurs équations différentielles à une autre équation dont on sait trouver l'intégrale. Supposons, par exemple, qu'on veuille ramener une équation à l'équation générale $py^n\,dy + y^{n+1}p^{I}\,dx + cy^q p^{II}\,dx = 0$, dans laquelle p, p^{I} & p^{II} sont des fonctions de x sans y * & qu'on peut toujours intégrer (128). Si dans cette formule on substitue différentes fonctions de x prises à volonté pour p, p^{I}, p^{II} & qu'on fasse $z = xy$, ou en général $z^t = x^r y^s$, t, r, s étant des exposans arbitraires qu'on détermine ensuite comme on veut, il est évident qu'on trouvera par ce moyen autant d'équations différentielles qu'on voudra, toutes réductibles à la forme générale dont on vient de parler.

* On a supprimé les coefficiens a, b, c. Cela ne change rien à la méthode, d'autant plus qu'on peut supposer que ces coefficiens entrent dans p, p', p''.

137. THÉORÈME. *Si dans l'équation* $A(ay^n dy + x^n dx) + B(xdy - ydx)\,b = 0$, *a & b sont des constantes*, *A & B des fonctions homogenes de x & de y, on pourra toujours ramener cette équation à la formule générale dont on vient de parler en faisant* $x = yz$. Si l'on divise l'équation proposée par A, elle devient $(ay^n dy + x^n dx) + b(xdy - ydx).\frac{B}{A}$. Si l'on substitue dans cette derniere équation yz au lieu de x & $ydz + zdy$ au lieu de dx, il viendra en réduisant, $(a + z^{n+1})\,y^n dy + y^{n+1} z^n dz - \frac{bB}{A} y^2 dz = 0$; mais B est une fonction homogene que je suppose de la dimension u dans chaque terme de B, des variables x & y; donc en substituant yz au lieu de x, l'on aura $B = y^u Z$, Z étant une fonction de z. Supposons de même que A est une fonction homogene de x & y de la dimension u', on aura $A = y^{u'} Z'$, Z' étant une fonction de z; donc $\frac{B}{A} = \frac{y^u Z}{y^{u'} Z'} = y^V Z''$, en faisant $u - u' = V$ & $\frac{Z}{Z'} = Z''$; donc la proposée deviendra $(a + z^{n+1})y^n dy + y^{n+1} z^n dz - by^{V+2} Z'' dz = 0$, qui a la forme requise, puisque $a + z^{n+1}$, z^n, $-bZ''$ sont des fonctions de z.

Soit l'équation $(fx^{-1}y^2 + gy).(x^2 dx + ay^2 dy) + (hx^2y^2 + iyx^3).(xdy - ydx)\,b = 0$. En la comparant avec celle du théorême, on trouve $n = 2$, $A = fx^{-1}y^2 + gy$, $B = hx^2y^2 + iyx^3$; & en faisant $x = yz$, on aura $A = y\frac{f+gz}{z} = y^{u'} Z'$; donc $u' = 1$ & $Z' = \frac{f+gz}{z}$. On trouvera aussi $B = y^u Z = y^4(hz^2 + iz^3)$; donc $u = 4$ & $Z = hz^2 + iz^3$. Donc $V = u - u' = 3$ & $Z'' = \frac{hz^3 + iz^4}{f+gz}$; & l'équation transformée

formée sera $(a+z^3)\, y^2 dy + y^3 z^2 dz + b y^5 \times \left(\frac{h z^3 + i z^4}{f+gz}\right) dz = o.$

138. THEOREME. *Si dans l'équation* $a x^n dx + b y^n dy + (x dy - y dx)\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = o$, *les quantités* A & B *sont des fonctions homogenes de* x & *de* y, *de même ou de différentes dimensions entr'elles, ou dont la différence des dimensions est* k, k *étant* $= o$ *ou un nombre quelconque*, C & D *étant aussi des fonctions homogenes telles que la différence des dimensions de* C *sur* D *soit* $= n - 1$, *on pourra toujours réduire cette équation à la forme du* N°. (128), *en faisant* $x = yz$. L'on aura $dx = y dz + z dy$. Substituant ces valeurs de dx & de x dans l'équation proposée, elle deviendra $a z^{n+1} y^n dy + a y^{n+1} z^n dz + b y^n dy - y^2 dz\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = o$. Or A, B, C, D étant des fonctions homogenes de x & de y, telles qu'on l'a supposé, l'on aura $\frac{A}{B} = y^k P$, P étant une fonction de z; & $\frac{C}{D} = y^{n-1} P'$, P' étant encore une fonction de z; donc $- y^2 dz\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = - y^{k+2} P dz - y^{n+1} P' dz$, & l'équation transformée sera $(a z^{n+1} + b)\, y^n dy + (a z^n - P')\, y^{n+1} dz - y^{k+2} P dz = o$, qui a la forme requise.

EXEMPLE. Soit l'équation $a x^7 dx + b y^7 dy + (x dy - y dx) . \left(x^2 + y^2 + \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3}\right) = o$. En la comparant avec celle du théorême, l'on trouve $n = 7$, $\frac{A}{B} = x^2 + y^2$, $\frac{C}{D} = \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3}$, $k = 2$ & $9 - 3 = 6 = n - 1$, selon les conditions requises. En substi-

tuant zy au lieu de x, réduisant & arrangeant les termes, l'on aura $(az^8+b)y^7dy+y^8\left(az^7-(\frac{z^8+z}{z^3+1})\right)dz-y^4(z^2+1)dz=0$, équation qui a la forme qu'on demande, & qu'on rendra plus simple en la divisant par y^4.

139. PROBLÊME. *Étant donnée l'équation à quatre termes* $ax^m dx + by^p.x^n dx + cy^s dx - dy = 0$, *la réduire à trois termes, pour l'intégrer ensuite par le problême du N°. 130.* En faisant $y = x^h z$, & substituant au lieu de y & de dy les valeurs que donne cette supposition, la proposée devient $ax^m.dx + bz^p x^{hp+n} dx + cz^s x^{hs} dx - hzx^{h-1} dx - x^h dz = 0$, équation de cinq termes qu'on peut réduire à trois, en supposant que deux termes se détruisent; mais la supposition de deux termes égalés à 0, ne doit pas conduire à une absurdité. Supposons $bz^p x^{hp+n} dx - hzx^{h-1} dx = 0$, l'on aura $p=1$, $hp+n=h+n=h-1$, ou $n=-1$, & $b=h$ *, ce qui réduit l'équation proposée à celle-ci $ax^m dx + byx^{-1} dx + cy^s dx - dy = 0$, qu'on ramene à l'équation de trois termes $ax^m dx + cz^s x^{bs} dx - x^b dz = 0$ ou (en divisant par x^b & transposant) à l'équa-

* Ainsi si dans la proposée l'on a $p=1$, & $n=-1$, on pourra facilement la réduire à trois termes en faisant $y=x^b z$.

tion $dz = ax^{m-b}\,dx + czx^{bs-b}\,dx$, en faisant $y = x^b z$.

Si dans cette équation $m = bs$, l'on a, en substituant cette valeur & divisant par $a + cz$, $x^{m-b}\,dx = \frac{dz}{a+cz^s}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées ; si on a $s = 2$, la derniere équation aura la forme de celle de Ricati.

Avant de passer à d'autres méthodes nous allons résoudre un problême qui peut être utile dans certains cas.

140. PROBLÊME. *Soit l'équation différentielle* $dy + ypdx + y^2p'dx + p''dx = 0$, p, p', p'' *désignant des fonctions de* x *sans* y, *étant données deux valeurs de* y *en* x, *qui satisfassent à l'équation proposée, c'est-à-dire, la rendent égale à* o, *trouver le facteur qui doit la rendre intégrable.* Soient m & n les fonctions de x qui, substituées au lieu de y, rendent la proposée $= 0$; en substituant successivement m & dm, n & dn au lieu de y & de dy, l'on aura $dm + mpdx + m^2p'dx + p''dx = 0$, & $dn + npdx + n^2p'dx + p''dx = 0$. Soit $\frac{y-m}{y-n} = z$, ou $y = \frac{m-nz}{1-z}$; si l'on substitue les valeurs de y & de dy que donne cette supposition dans l'équation proposée, qu'on multiplie par $(1-z)^2$, & que dans le résultat on substitue les valeurs de dm, dn que donnent les deux équations précédentes, on aura en réduisant & préparant l'équation, $p'z\,dx(m-n)^2 + (m-n)dz = 0$, ou en divisant par $(m-n)z$,

& transpoſant, $\frac{dz}{z} = -p^1(m-n)\ dx$; & en intégrant, $L.z = -S.p^1(m-n)dx = -S.(m-n)dxL.e$, ($e$ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$), ou $z = e^{-S.p(m-n)dx}$. Ainſi l'intégrale de l'équation $p^1 z\,dx(m-n)^2 + (m-n)dz = 0$, ou $p^1 dx.(m-n) + \frac{dz}{z} = 0$, eſt $e^{S.p^1(m-n)dx} + \frac{y-m}{y-n} = C$, en ſubſtituant la valeur de z.

Si l'on fait attention maintenant qu'après les ſubſtitutions l'équation propoſée a été multipliée par $(1-z)^{-}$, & diviſée par $(m-n).z$, il eſt évident qu'en multipliant tout d'un coup par $\frac{(1-z)^2}{(m-n)z} = \frac{m-n}{(y-n)(y-m)}$, à cauſe de $z = \frac{y-n}{y-n}$, l'équation propoſée ſera intégrable. On peut voir par la ſolution de ce problême qu'ayant des intégrales particulieres des équations de la forme propoſée, on peut en trouver l'intégrale générale. Si $p = 0$, l'on aura l'équation de Ricati qui n'eſt qu'un cas particulier de notre équation, au reſte nous traiterons plus au long des intégrales particulieres des équations différentielles.

141. PROBLÊME. *Intégrer l'équation $x = yP + M$, dans laquelle P & M ſont des fonctions quelconques de z ou de $\frac{dx}{dy}$.* En différentiant l'équation propoſée, l'on a $dx = P\,dy + y\,dP + dM = z\,dy$; puiſque l'équation $z = \frac{dx}{dy}$,

donne $dx = z\,dy$. Donc $P\,dy - z\,dy + y\,dP + dM = 0$, & $dy + \frac{y\,dP}{P-z} + \frac{dM}{P-z} = 0$. Puisque P & M sont des fonctions de z, l'on pourra supposer $\frac{dP}{P-z} = V\,dz$, $\frac{dM}{P-z} = V'dz$, V & V' étant des fonctions de z. Ainsi l'équation se réduira à cette forme $y^{0}\,dy + y^{1}V\,dz + y^{0}V'dz = 0$, qui a les conditions requises (128); & supposant $L.\,e = 1$, & C une constante quelconque, on trouvera aisément par le N°. cité, l'intégrale $y\,e^{S.\,V\,dz} + S.(V'dz.\,e^{S.\,V\,dz}) = C$; donc $y = \frac{C - S.\,(V'dz\,.\,e^{S.\,V\,dz})}{e^{S.\,V\,dz}}$. L'on aura donc la valeur de y en z, & substituant la valeur de dy prise de cette équation dans l'équation $dx = z\,dy$, l'on aura $x = S.\,z\,dy$, & $S.\,z\,dy$ ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une seule variable.

142. Il arrive assez souvent que par la substitution de z au lieu de $\frac{dy}{dx}$, ou de $z\,dx$ au lieu de dy, on parvient à des équations finies & même algébriques entre x & y sans employer les méthodes ordinaires d'intégration.

Si l'on avoit l'équation $y\,dx - x\,dy = a\sqrt[3]{(dx^{3} + dy^{3})}$, en supposant $dy = z\,dx$ & faisant disparoître dx par la division, on trouve $y - zx = a\sqrt[3]{(1 + z^{3})}$ (B). Différentiant cette équation, substituant la valeur de dy, transposant, réduisant & divisant par dz, il vient x

$= \frac{-az^2}{\sqrt[3]{((1+z^3))^2}}$. Substituant cette valeur dans l'équation B, on en tirera $y = \frac{a}{\sqrt[3]{((1+z^3))^2}}$ (D); donc $x^3 + y^3 = \frac{a^3(1-z^6)}{(1+z^3)^2} = -a^3 + \frac{2a^3}{1+z^3}$; donc $\frac{1}{1+z^3} = \frac{a^3+x^3+y^3}{2a^3}$. En substituant cette valeur de $\frac{1}{1+z^3}$ dans l'équation D, on trouvera, après les opérations ordinaires, $4a^3y^3 = (a^3+x^3+y^3)^2$.

143. THÉORÈME. *Si on multiplie ou si on divise une différentielle quelconque, par une fonction de son intégrale, le résultat sera une différentielle, dont l'intégrale ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une seule variable.* Soit dp une différentielle quelconque, dont l'intégrale $= p$ *, & p' une fonction de p, il est évident que le produit $p'dp$ & le quotient $\frac{dp}{p'}$ seront des différentielles à une seule variable p; donc les intégrales S. $p'dp$, S. $\frac{dp}{p'}$ se trouveront la première par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée perpendiculaire $= p'$ & l'abscise $= p$, &

*Quelque nombre d'inconnues que puisse renfermer p, on peut considérer cette quantité comme une seule inconnue.

la ſeconde par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée $= \frac{1}{p'}$ & l'abſciſſe $= p$.

144. THÉORÊME. *L'équation* $p' dp - d(p' y z) = -y. d.(p' z)$ *eſt intégrable lorſque l'intégrale du premier membre* $S. p' dp - p' y z$ *eſt égale à une fonction du produit de* y *par une fonction de* $p' z$.

Soit $m(p' z)$ cette fonction de $p' z$, $n(y m(p' z))$ une fonction du produit $y. m(p' z)$. En conſidérant $y. m(p' z)$ comme une ſeule inconnue x, & la quantité $S. p' dp - p' y z$ comme une autre inconnue t, on aura $t = nx$; donc $x = \frac{1}{n} t = qt$ (q étant une fonction de t comme il ſuit de la nature des équations) $= q(S. p' dp - p' y z$; donc on aura $q(S. p' dp - p' y z) = y. m. (p' z)$. Donc en diviſant les deux membres de l'équation propoſée par des quantités égales, on aura

$$\frac{p' dp - d(p' y z)}{q(S. p' dp - p' y z} = \frac{-y. d(p' z)}{y. m(p' z)} = \frac{-d(p' z)}{m(p' z)},$$

équation dont chaque membre eſt une différentielle diviſée par une fonction de ſon intégrale; c'eſt pourquoi cette équation ſera intégrable, & par conſéquent la propoſée le ſera auſſi.

COROLLAIRE. L'équation $p dx - d.(p y z) = - y. d. (p z)$, p étant une fonction de x; eſt intégrable lorſque $S. p dx = a y p z + b y p^h z^h$, a, b, h étant conſtantes : car en ajoutant $- y p z$ de part & d'autre, l'on parviendra aiſément à l'équation $S. p dx - y p z = y(a p z - p z +$

$b\,(pz)^b\,) = y.\,m\,(pz)$. On aura donc $\frac{pdx - d.(pyz)}{S.pdx - pyz} = \frac{-y.d.(pz)}{y.m.(pz)} = \frac{-d.(pz)}{m.pz}$; & en intégrant, L. $(S.pdx - pyz) = S.\,\frac{-d(pz)}{m\,(pz)} + C$.

Supposons que les deux équations du corollaire soient $x^{\frac{1}{2}}\,dx - d.(yx^{\frac{1}{2}}z) = -y.\,d.(yx^{\frac{1}{2}}z)$, & $\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = yx^{\frac{1}{2}}z + 2\,yx^{\frac{1}{2}}z = 3\,yx^{\frac{1}{2}}z$, ce qui donne $a = 1 = h$, $b = 2$, $p = x^{\frac{1}{2}}$. L'intégrale du corollaire sera L. $(\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - y\,x^{\frac{1}{2}}z)$ $= S.\frac{-d.(x^{\frac{1}{2}}z)}{2\,x^{\frac{1}{2}}z} + C = -\frac{1}{2}$ L. $x^{\frac{1}{2}}z +$ L. f (en faisant C $=$ L. f, ce qui est permis) $=$ L. $f\,(x^{\frac{1}{2}}z)^{-\frac{1}{2}} =$ L. $\frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}}$; donc en repassant des logarithmes aux nombres, $\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z = \frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f}{x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}}$; donc $\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}z^{\frac{1}{2}}$ $- yx^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{2}} = f$. Si on substitue dans cette équation la valeur de z prise de l'équation $\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = 3\,yx^{\frac{1}{2}}z$, on aura $\frac{2}{3}\,x^{\frac{7}{4}}\sqrt{\frac{2x}{9y}} - y\,x^{\frac{5}{4}}\times$

$\sqrt{\frac{8x^3}{729y^3}} = f$, équation par le moyen de laquelle on peut trouver la valeur de y en x, ou celle de x en y.

145. PROBLÈME. *Trouver les intégrales des deux équations* $dx + (ax + by)dt = 0$, $dy + (hx + fy)dt = 0$. Multipliant la ſeconde équation par un facteur conſtant & indéterminé p, & l'ajoutant enſuite à la première, il vient $dx + pdy + ((a + hp)x + (b + fp)y)dt = 0$. Il faut faire enſorte que dans cette équation le multiplicateur de dt devienne un multiple de $x + py$ intégrale des autres termes de l'équation, afin qu'ayant ſuppoſé $x + py = u$, & m étant une conſtante indéterminée, l'équation prenne la forme $du + mudt = 0$, ou $\frac{du}{u} + mdt = 0$, équation dans laquelle les variables ſont ſéparées. On aura donc par cette ſuppoſition $ax + hpx + by + fpy = mx + mpy$, & en comparant terme à terme, les deux membres de cette équation, $ax + hpx = mx$, & $by + fpy = mpy$, d'où l'on tire $m = a + hp$, $m = \frac{b + fp}{p}$; donc $a + hp = \frac{b + fp}{p}$, ou $ap + hpp = b + fp$. Si l'on conſidere p comme une inconnue, l'on trouvera en réſolvant cette équation du ſecond dégré, deux valeurs de p. Nous repréſenterons l'une de ces valeurs par p & l'autre par p'. Mais l'équation $x + py = u$, donne $du = dx + pdy$, & de plus nous avons $m = a + hp$; donc l'équation $du + mudt = 0$,

devient $du + (a + hp)\,u\,dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + hp)\,dt$; donc en intégrant & ajoutant une constante $C' = L.g$, on aura $L.u = L.g - t(a + hp) = L.g - t.(a + hp).L.e$ (en faisant $L.e = 1$) $= L.\frac{g}{e^{t(a+hp)}}$; donc $u = ge^{-t(a+hp)}$. En employant les deux valeurs de p, on aura $x + py = u$, & $x + p'y = u'$, $u = ge^{-t(a+hp)}$ (A), & $u' = g'e^{-t[a+hp']}$ (B). La première équation donne $x = u - py$. Si l'on en retranche la seconde, on trouvera facilement $y = \frac{u - u'}{p - p'}$; donc $x = u - py = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$. Substituant dans ces valeurs de y & de x, les valeurs de u & de u' que donnent les équations A & B, on déterminera les constantes g & g' par les valeurs que x & y doivent avoir lorsque t est égale à 0, ou à une quantité donnée. Si l'équation qui doit donner les valeurs de p & qu'on trouvera facilement devoir être $hpp + ap - fp - b = 0$, ne donne pas deux valeurs de p, ce qui arrivera si $h = 0$, ou $b = 0$, & dans le cas où les deux valeurs de p seront égales, voici comment on pourra s'y prendre. 1°. Si $b = 0$, une des valeurs de p est 0, & l'autre $= \frac{f - a}{h}$. Ainsi dans les formules précédentes on fera $p' = 0$. 2°. Si $h = 0$, la seconde équation proposée sera $dy + fy\,dt = 0$, ou $\frac{dy}{y} = -f\,dt$, d'où l'on tire $y = ne^{-ft}$, n étant une constante; donc y sera

une fonction de t que nous désignerons par q, & substituant cette valeur de y dans la première équation, l'on a $dx + axdt + bqdt = 0$, équation qui se réduit à la formule du N°. 128 & qu'on integre facilement. Si les deux valeurs de p sont égales, on aura toujours l'équation $x + py = u$, ou $x = u - py = ge^{-t[a+bp]} - py$. Substituant cette valeur de x dans la seconde équation proposée, on trouvera $dy + (f - hp)ydt + hge^{-t[a+bp]}dt = 0$, équation qui se réduit encore à la formule ci-dessus (128). Enfin si p & p' étoient imaginaires, le problême se résoudroit de la même manière. Car les quantités imaginaires se réduisent toujours à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, & si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires disparoîtroient.

Si les équations étoient $dx + (ax + by)Tdt + Ndt = 0$, $dy + (hx + fy)Tdt + N'dt = 0$, T, N, N' étant des fonctions de t, ou 0, on multiplieroit la seconde par la constante p, & ajoutant le produit à la première, on auroit $dx + pdy. + \big((a + hp)x + (b + fp)y\big)Tdt + (N + pN')dt = 0$. Faisant ensuite $x + py = u$, & $(a + hp)x + (b + fp)y = mx + mpy$, on trouvera comme ci-devant, $m = a + hp = \frac{b + fp}{p}$; d'où l'on tirera l'équation $hpp + ap - fp - b = 0$; qui donnera deux valeurs de p, qu'on représentera par p & p', & l'on aura $du + (a + hp)uTdt + (N + N'p)dt = 0$, équation qu'on integre comme la précédente par le N°. (128); & l'on trouvera les va-

leurs de y & de x, dans lesquelles on mettra pour u & u' leurs valeurs trouvées par le N°. (128).

146. REMARQUE. Si les deux dernières équations contenoient la premiere le terme $a' dy$, la seconde le terme ndx, on multiplieroit de même la seconde par p pour l'ajouter à la premiere, dans la somme l'on supposeroit $(1 + np)x + (a' + p)y = u (a + hp)x + (b + fp)y = m(1 + np)x + m(a + p)y$, & l'on auroit l'équation $du + mu T dt + (N + pN')dt = 0$, & l'on feroit le reste comme dans le cas prédédent, en se servant de la valeur de $u = (1 + np).x + (a' + p).y$, au lieu de $u = x + ay$. Si les quantités dx & dy étoient multipliées par des constantes, la solution ne seroit pas plus difficile & d'ailleurs on peut les faire disparoître en divisant chaque équation par le coefficient du premier terme.

147. PROBLÊME. Intégrer les trois équations $dx + (ax + by + cz)dt = 0$; $dy + (hx + ky + lz)dt = 0$; $dz + (mx + ny + rz)dt = 0$. Multipliant la seconde par une constante A, la troisième par la constante B, A & B sont des indéterminées, & prenant ensuite la somme des trois équations, l'on aura $dx + Ady + Bdz + \big((a + Ah + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Br)\big)dt = 0$. En supposant ensuite $x + Ay + Bz = u$, & faisant le multiplicateur de dt égal à Mu, M étant une constante, l'on aura $du + Mudt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -Mdt$, ou en intégrant, $L.u = -Mt + L.g. = L.g - Mt.L.e$, ou $u = ge^{-Mt}$. De plus on aura par supposition, $Mu = Mx +$

$MAy + MBz = (a + Ah + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Br)z$. Egalant les termes homologues de cette dernière équation, l'on aura $M = a + Ah + Bm$, $MA = b + Ak + Bn$, $MB = c + Al + Br$; d'où l'on tire les deux équations $a + Ah + Bm = \frac{b + Ak + Bn}{A} = \frac{c + Al + Br}{B}$. Prenant la valeur de B dans la première de ces deux équations & la ſubſtituant dans la ſeconde, on aura, après les réductions ordinaires, une équation du troiſième dégré qui donnera trois valeurs de A.

Cela poſé en déſignant par p, p', p'' ces trois valeurs de A, par q, q', q' les trois valeurs correſpondantes de B, par f, f', f'' les valeurs correſpondantes de M, au lieu de l'équation $u = ge^{-Mt}$, on aura ces trois équations $u = ge^{-ft}$, $u' = g'e^{-f't}$, $u'' = g''e^{-f''t}$, & au lieu de l'équation $x + Ay + Bz = u$, on aura les trois équations $x + py + qz = ge^{-ft}$, $x + p'y + q'z = g'e^{-f't}$; $x + p''y + q''z = ge^{-f''t}$; de ces trois équations l'on tirera les valeurs de x, y, z, & l'on déterminera g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorſque t eſt $= 0$, ou eſt égal à une conſtante donnée.

Si l'équation en A n'a pas trois racines inégales, comme on l'a ſuppoſé, on pourra toujours pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le problême, au cas ci deſſus (146). Car ſoit p, q, f, les valeurs reſpectives de A, B, M, l'équation $x + Ay + Bz = u = ge^{-Mt}$, deviendra $x + py + qz = ge^{-ft}$. Faiſant évanouir par cette dernière équation la variable z,

on réduira les trois équations données à deux équations de la forme de celles du N°. (146). Mais si l'équation en A n'avoit aucune racine, parce que les coefficiens qui affectent les différentes puissances de A seroient tous égaux à o, dans ce cas si le terme tout connu de l'équation s'évanouit aussi, c'est une marque qu'on peut donner à A telle valeur qu'on voudra. Si ce terme ne s'évanouit pas, on augmentera ou on diminuera à volonté le coefficient a ou b, &c. d'une quantité infiniment petite pour rétablir un des termes de l'équation, & l'on trouvera du moins par la méthode du quarré algébrique, une valeur de A qui résoudra le problême.

En général quelque soit le nombre des équations $dx + ady + cdz$ &c. $+ (fx + kz +$ &c.$) dt + N dt = 0$, $dx + a'dy + c'dz$ &c $+ (f'x + hy + k'z$ &c.$) dt + N' . dt = 0$, &c. qui contiennent autant de variables que l'on voudra, pourvu qu'elles soient de cette forme, ou qu'elles y soient réductibles & que l'on ait autant d'equations que de variables, en multipliant chacune de ces équations par des constantes indéterminées, prenant ensuite leur somme, en supposant $= du$ la somme des termes du résultat qui contiennent les différentielles dx, dy, dz, &c. & faisant le multiplicateur de dt * $= mu$, u étant l'intégrale du premier terme, elles se réduiront à une équation $du + mu\,dt + (T + T' +$ &c.$) dt$

* Il s'agit de dt pris dans le second terme de l'équation en prenant pour un seul terme la somme de ceux qui contiennent les différentielles dx, dy, &c. & pour un autre terme tous ceux qui contiennent les variables x, y, &c. & qui sont multipliés par dt.

$= 0$, T, T', &c. étant des fonctions de t, ou o. Or cette équation est intégrable par la méthode ci-dessus (128).

REMARQUE. Si on avoit un nombre n d'équations renfermant le nombre $n + 1$ de variables, en multipliant toutes ces équations, excepté la première, respectivement par des facteurs m, m', m'', &c. qu'on supposeroit être des fonctions indéterminées de ces variables, on ajouteroit les produits à la première équation, & multipliant la somme par un facteur p qu'on supposeroit être une fonction des mêmes variables, on supposeroit que le résultat est une différentielle complette.

Si l'on avoit les deux équations $a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$, $a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz = 0$, a, a', b, b', c, c' étant des fonctions de x, y, z, ces fonctions peuvent aussi renfermer des constantes; multipliant la seconde par m, ajoutant le produit à la première, & multipliant ensuite par p, on trouveroit $p\,(a + a'm)\,dx + p(b + b'm)\,dy + p(c + c'm)\,dz = 0$. Pour que cette équation soit complette, il faut (par le N°. 89) qu'on ait les trois équations

$$\frac{d\left(p.(a + a'm)\right)}{dy} = \frac{d\left(p.(b + b'm)\right)}{dx};$$

$$\frac{d\left(p.(a + a'm)\right)}{dz} = \frac{d\,(p.c + c'm)}{dx},$$

$$\frac{d(p.b + b'm)}{dz} = \frac{d\left(p.(c + c'm)\right)}{dy}, \text{ ou}$$

$$\frac{dp}{dy}(a + a'm) + p.\frac{d(a + a'm)}{dy} = \frac{dp}{dx} \times$$

$(b + b'm) + p.\frac{d(b+b'm)}{dx}$; $\frac{dp}{dz}(a + a'm)$ $+ p\frac{d(a+a'm)}{dz} = \frac{dp}{dx}(c + c'm) +$ $p\frac{d(c+c'm)}{dx}$; $\frac{dp}{dz}(b + b'm) + p.\frac{d(b+b'm)}{dz}$ $= \frac{dp}{dy}(c + c'm) + p.\frac{d(c+c'm)}{dy}$. Si en regardant $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dz}$ comme deux inconnues, on ſubſtitue dans la première équation leurs valeurs priſes dans les deux dernières, on tróuvera, toute réduction faite, $(c + c'm).\left(\frac{d(a+a'm)}{dy} - \frac{d(b+b'm)}{dx}\right) + (a + a'm)\left(\frac{d(b+b'm)}{dz} - \frac{d(c+c'm)}{dy}\right) + (b + b'm)\left(\frac{d(c+c'm)}{dx} - \frac{d(a+a'm)}{dz}\right) = 0$, équation indépendante de p.

On cherchera donc pour m une fonction de x, y & z la plus générale qu'il ſoit poſſible, & qui puiſſe ſatisfaire à cette équation, & ſuppoſant qu'on ait trouvé m, on cherchera pour p une fonction des variables x, y, z qui ſatisfaſſe à deux quelconques des trois équations ci-deſſus qu'on a trouvées d'abord.



DES

DES INTÉGRALES PARTICULIERES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

148. *L'intégrale particuliere d'une équation différentielle* eſt un rapport des variables qui ſatiſfait à l'équation, & qui ne contient aucune nouvelle conſtante, au lieu que l'intégrale générale contient une conſtante indéterminée qui ne ſe trouve pas dans l'équation différentielle s'il s'agit d'une équation du premier ordre. L'intégrale finie & complette d'une équation de l'ordre m doit contenir un nombre m de conſtantes arbitraires Voyez le (N°. 77). Il eſt ſouvent facile de trouver une intégrale particulière comme en devinant. Par exemple, ſi l'on avoit l'équation $aady + yydx = aadx + xydx$, il ſeroit facile de voir qu'on ſatisfait à cette équation en faiſant $x = y$. Ce rapport qui ne renferme ni la conſtante a qui ſe trouve dans la différentielle, ni une conſtante indéterminée qui ne s'y trouve pas, ne peut être qu'une intégrale particulière. Souvent l'intégrale particulière peut faire connoître l'intégrale générale. Si l'on fait $y = x + z$, cette ſuppoſition, en faiſant les opérations ordinaires, changera notre équation en celle-ci $aadz + xzdx + zzdx = 0$, celle-ci, en ſuppoſant $z = \frac{aa}{u}$, devient $du - \frac{xudx}{aa} = dx$, qui, étant multipliée par $e^{\frac{-xx}{2aa}}$ (on ſuppoſe L. $e = 1$) & enſuite intégrée, donne $u . e^{\frac{-xx}{2aa}} = S . e^{\frac{-xx}{2aa}} dx$;

ou $u = e^{\frac{xx}{2aa}} S. e^{\frac{-xx}{2aa}} dx + C$, en ajoutant une constante. Si l'on suppose $C = \infty$, le premier terme du second membre de l'équation disparoit, & l'on a $u = \infty$ & $z = \frac{aa}{u} = 0$; donc alors $y = x$: ce qui fait voir que l'intégrale particulière doit être contenue dans l'intégrale générale. Si l'on avoit l'équation $a^3 dy + y^3 dx = a^3 dx + x^3 dx$, la relation $x = y$ satisferoit à l'équation; mais en supposant $y = x + z$, on parviendra à une équation qui ne paroîtra pas plus facile à résoudre que la proposée.

Dans la solution d'un problême on n'a besoin que d'une intégrale particulière ; ainsi si l'on peut trouver cette intégrale, on résoudra le problême, quoiqu'on ne puisse pas avoir l'intégrale générale de l'équation différentielle qui exprime la nature du problême.

149. Quoiqu'une certaine relation des variables satisfasse à l'équation proposée, cette relation n'est pas toujours une intégrale particulière. Si l'on avoit, par exemple, l'équation $dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$, on satisferoit à cette équation en supposant $xx + yy = aa$; car alors en ôtant la fraction, le premier membre devient $= 0$, il en est de même du second, puisque la différentielle de $(xx + yy)$ doit être $= 0$, différentielle de aa. Or l'intégrale générale de cette équation est $y = C - \sqrt{(aa - xx - yy)}$ qui ne contient pas l'équation $xx + yy = aa$, quelque valeur qu'on donne à C, x & y restant indéterminées. Au reste

les intégrales trouvées par les méthodes ordinaires, ne ſont jamais dans ce cas; c'eſt-à-dire, que ſi l'on trouvoit par les méthodes ordinaires, une intégrale $y = ax$ ſans ajouter de conſtante C, cette intégrale ſeroit une intégrale particuliere de l'équation propoſée.

150. PROBLÊME. *Le rapport $y = x$ ſatisfaiſant à l'équation $ady - adx = dx\sqrt{(yy - xx)}$, déterminer ſi ce rapport eſt une intégrale particuliere de l'équation propoſée.* Qu'on ſuppoſe $y = x + p$, p étant une quantité infiniment petite, l'on aura, en négligeant la ſeconde puiſſance de p, $\sqrt{(yy - xx)} = \sqrt{(2xp)}$. Mais l'équation $y = x + p$ donne $dy = dx + dp$; donc $ady - adx = adx + adp - adx = adp$, & notre équation devient $adp = dx\sqrt{2xp}$, en ſubſtituant la valeur de $\sqrt{(yy - xx)}$. Ainſi $\frac{adp}{\sqrt{p}}$ ou $\frac{adp}{p^{\frac{1}{2}}} = dx\sqrt{2x}$, & en intégrant, $2ap^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + C$. Maintenant je remarque que p eſt une quantité infiniment petite par l'hypothèſe, & que de quelle maniere qu'on détermine C, x reſtant indéterminé, l'on ne peut ſuppoſer p infiniment petit, mais que p pourra être auſſi grand que l'on voudra; donc le rapport $y = x$ ne peut être une intégrale particuliere de l'équation propoſée, & cela arrivera toutes les fois que dans la transformée l'on aura dp divisé par une puiſſance m de p, ou par p^m, ſi l'exposant m eſt plus petit que l'unité. Au contraire ſi l'on a $\frac{dp}{p^m} = Bdx$, B étant une fonction

de x ou une conſtante, l'on aura $\frac{1}{(m-1).p^{m-1}} =$ $C - S.Bdx = C - D$, en faiſant $S.Bdx = D$; d'où l'on tire $(m-1)p^{m-1} = \frac{1}{C-D}$, & en ſuppoſant $C = \infty$, l'on aura p infiniment petit lorſque m ſera > 1, comme l'hypotheſe l'exige.

Si $m = 1$, & qu'on ait l'équation $\frac{dp}{p^m} = Bdx$, alors en faiſant $S.Bdx = D$, on trouvera $L.p = L.C + L.D = L.CD$, ou $p = CD$; & en ſuppoſant C infiniment petit, l'on aura p infiniment petit, comme cela doit être par ſuppoſition.

151. PROBLÊME. *Si une certaine relation entre deux variables ſatisfait à une équation différentielle, déterminer ſi cette relation eſt une intégrale particuliere ou non.* Soit l'équation $Adx = Bdy$, A & B étant des fonctions quelconques de x & de y, à laquelle ſatisfaſſe le rapport $y = t$, t étant une fonction de x, de maniere qu'en ſubſtituant t au lieu de y, l'on ait l'équation $Adx - Bdy = 0$, ou $Adx = Bdy$, ou $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$. Je ſuppoſe $y = t + p$, l'on aura $dy = dt + dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$. Si l'on faiſoit $p = 0$, l'on auroit $dp = 0$, & l'équation ſeroit $\frac{dt}{dx} = \frac{A}{B}$. Conſidérons p comme une quantité infiniment petite, & négligeant les termes qui ſont affectés des puiſſances de p au-deſſus de la plus baſſe, ſuppoſons que par la

fubftitution $y = t + p$, l'équation devienne $\frac{A}{B} = \frac{dt}{dx} + D p^m$; l'équation $\frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$ devant être la même que la précédente, l'on aura $\frac{dp}{dx} = D p^m$, ou $\frac{dp}{p^m} = D\, dx$. Maintenant il eft vifible, par ce qu'on vient de dire (150), que $y = t$ fera une intégrale particuliere, ou qu'on pourra regarder p comme $= 0$, lorfque m fera $= 1$ ou plus grand que 1. Si au contraire $m < 1$, le rapport $y = t$, ne fera pas une intégrale particuliere.

152. PROBLÊME. *Le rapport $y = x$ fatisfaifant à l'équation $dx(1 - y^m)^n = dy(1 - x^m)^n$; on demande fi ce rapport eft une intégrale particuliere ou non.* Suppofant $y = x + p$, l'on aura par le binome de Newton, $y^m = x^m + mx^{m-1}p$, en négligeant les autres termes qui contiennent des puiffances de p plus élevées que la premiere, & $(1 - y^m)^n = (1 - x^m - mx^{m-1}p)^n = (1 - x^m)^n - mnx^{m-1}p(1 - x^m)^{n-1}$; donc l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^m)^n}{(1 - x^m)^n}$ devient $\frac{dx}{dx} + \frac{dp}{dx}$ ou $1 + \frac{dp}{dx} = 1 - \frac{mnx^{m-1}p}{1 - x^m}$, ou $\frac{dp}{p} = - \frac{mnx^{m-1}dx}{1 - x^m}$; & parce que l'expofant de p eft ici une puiffance entiere, l'équation $y = x$ eft certainement une intégrale particuliere de la propofée.

153. THÉORÊME. *Si l'équation différentielle* $A dx + B dy = 0$, *étant multipliée par une fonction* m *de* x *&* *de* y *devient intégrable, le rapport* $m = 0$ *sera une intégrale particuliere, à moins que dans ce cas* A *ou* B *ne deviennent infinis.* Supposons que u soit un facteur de m, il faut démontrer que l'équation $u = 0$, est une intégrale particuliere de l'équation proposée. u étant une certaine fonction de x & de y, on peut, par l'équation $u = 0$, trouver pour la valeur de y, une fonction de u qui donne l'équation $Q\,dx + R\,du = 0$ entre x & u; & en faisant le multiplicateur $m = nu$, l'on aura l'équation $nQ\,u\,dx + nR\,u\,du = 0$, qui sera intégrable. Maintenant si ni Q, ni R ne sont divisibles par $u = 0$, ni A, ni B ne peut devenir infini, & l'intégrale sera divisible par u. Car soit qu'on integre le terme $nQu\,dx$, en regardant u comme constant, ou le terme $nRu\,du$ en considérant x comme constant, l'intégrale aura toujours un facteur u, en omettant la constante dans l'intégrale. Ainsi l'intégrale complette aura cette forme $Pu = C$, & si l'on fait $C = 0$, $u = 0$ sera une intégrale particuliere, excepté dans les cas que Q ou R seroient divisibles par u. Il faut dire la même chose de chaque facteur de m, pourvu que A ou B ne deviennent pas infinis par la supposition de $m = 0$.

REMARQUE. La condition dont on vient de parler est absolument nécessaire: car si l'on a l'équation $\frac{a\,dx}{y - x} + dy - dx = 0$, qui étant multipliée par $u = y - x$, devient intégrable, l'on aura $y = x + u$, & notre équation sera

$\frac{adx}{u} + du = 0$, ou $adx + udu = 0$, & comme la partie adx n'est pas multipliée par u, l'intégrale $ax + \frac{1}{2}uu$, en négligeant la constante, ne sera pas exactement divisible par u. Si la partie qui contient dx étoit multipliée par u, quoique la partie qui contient du ne le fût pas, cependant l'intégrale seroit divisible par u comme on peut le voir dans la différentielle $udx + xdu$, dont l'intégrale, en négligeant la constante, est xu. Ce qui fait voir que si la différentielle $Audx + Bdu$ est exacte, pourvu que B ne soit pas divisible par u, l'intégrale, en omettant la constante, sera divisible par u.

154. THÉORÊME. *Si l'équation différentielle* $Adx + Bdy = 0$ *devient intégrable en la divisant par une fonction* m *de* x *&* *de* y, *l'équation* $m = 0$ *sera une intégrale particuliere, à moins qu'en faisant* $m = 0$, A *ou* B *ne s'évanouissent.* Soit $m = nu$, u étant un facteur de m, il faut démontrer que l'équation $u = 0$, (& l'on doit dire la même chose de chacun des autres facteurs de m), est une intégrale particuliere. u étant une fonction de x & de y, on pourra, par cette considération, chasser y pour avoir l'équation $Qdx + Rdu = 0$; & en divisant celle-ci par nu, on la rendra complette. Il faut donc chercher l'intégrale de $\frac{Qdx}{nu} + \frac{Rdu}{nu}$, nous supposons que ni Q, ni R ne sont divisibles par u. Si l'on prend l'intégrale dans le premier terme, en considérant u comme constant, l'on a $\frac{1}{u} S. \frac{Qdx}{n}$, en négligeant la cons-

tante. Et si l'on prend l'intégrale du second terme, à cause que R n'a point de facteur u, comme nous le supposons, cette intégrale sera une fraction qui contiendra u au dénominateur; donc cette intégrale sera infinie lorsqu'on fera $u = 0$. Si donc l'intégrale est supposée $= V$, elle sera telle qu'elle deviendra infinie, lorsqu'on supposera $u = 0$, & l'intégrale complette étant $V = C$, on satisfera à l'équation $V = C$, en supposant $C = \infty$, & $u = 0$; d'où l'on peut conclure que chaque facteur u de m, donnera une intégrale particuliere $u = 0$, à moins qu'en faisant $u = 0$, les quantités A & B, ou Q & R ne s'évanouissent.

DE LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

155. J'entends ici par *construction géométrique d'une équation différentielle*, la méthode de trouver une courbe dont le rapport des coordonnées soit exprimé par l'équation différentielle proposée.

Soit l'équation différentielle $A\,dx + B\,dy = 0$, (A & B étant des fonctions de y & de x), on aura $A\,dx = -B\,dy$, ou $\frac{A}{B}\,dx = -dy$. Si l'on multiplie cette équation par $-a$, (a étant une quantité positive prise à volonté, par exemple, un pied), & qu'on fasse $\frac{-A\,a}{B} = p$, on pourra donner à l'équation précédente la forme $pdx = ady$; & p étant une fonction de y & de x, l'on aura en

intégrant, $S. p\,dx = ay$. Donc $y = \frac{S. p\,dx}{a}$ ou $ay = S. p\,dx$ eſt l'équation de la courbe cherchée. Si l'on ſuppoſe que $p = \frac{3y^0 xx}{a}$, l'on aura $S. p\,dx = \frac{x^3}{a}$, & l'équation de la courbe ſera $ay = \frac{x^3}{a}$, ou $a^2 y = x^3$ qui déſigne une courbe parabolique. Il faut faire enſorte que les membres de l'équation $pdx = ady$, ſoient de même dimenſion, ce qu'on peut toujours obtenir en diviſant ou en multipliant le premier membre par une conſtante b qu'on ſuppoſera égale à l'unité.

Soit $p = \frac{a^2 y^2 x}{ay + x^2}$. Je ſuppoſe qu'on ait décrit une infinité de courbes a C, fC′ (Fig. 16.) de manière que dans la première aC, l'on prenne $v = g$ quantité conſtante & que ſur chaque abſciſſe AB, on éleve l'ordonnée perpendiculaire BC; de ſorte que l'on ait $BC = \frac{a^2 y^2 x}{ay + x^2} = \frac{a^2 g^2 x}{ag + x^2}$. On décrira la ſeconde courbe fC′ de la même manière, & en ſuppoſant $y = g'$; ſuppoſons qu'on ait ainſi décrit une infinité de courbes en donnant ſucceſſivement à y des valeurs depuis o juſqu'à l'infini, de manière que la ligne y ſoit conſtante pour chaque courbe, mais différente dans toutes. Cela poſé, pdx repréſentera l'élément de l'aire de la courbe aC, lorſqu'on ſuppoſera dans p la quantité $y = g$; mais pdx repréſentera l'élément de l'aire de la courbe fC′ ſi l'on ſuppoſe $y = g'$, &c. Suppoſons que A ſoit l'origine des abſciſſes & qu'en faiſant $y = g$, l'on prenne l'aire AaBC =

$ay = ag$, on prolongera l'ordonnée B C jusqu'à ce que B M soit $= g = y$; si l'on suppose maintenant $y = g'$, on prendra l'aire A f C' B', & l'on fera le prolongement B' N $= g'$, c'est-à-dire, on fera B' N égale à la valeur de y dans la courbe f C', & ainsi de même pour toutes les courbes que nous supposons décrites par cette loi sur l'axe A B. Faisant passer une courbe MN par tous les points M, N ainsi déterminés, cette courbe sera la courbe cherchée, & cela arrivera de même, quelque fonction de y & de x que soit p. En effet l'on aura S. $pdx = ay$ (ou en général S.$pdx = z$, z étant une fonction de y, nous supposons qu'on n'ajoute point de constante, mais si l'on veut en ajouter une, il n'y a qu'à la renfermer dans z). Donc si on fait $y = g$, l'on aura $y = \text{B M} = \frac{\text{S.}pdx}{a}$, & si l'on suppose $y = g'$, l'on aura B' N $= y = \frac{\text{S.}pdx}{a}$. Donc la nature de la courbe M N est exprimée par l'équation S. $pdx = ay$, ou $pdx = ady$. Mais on doit remettre dans p la variable y au lieu de la constante g, qui est le parametre de la courbe a C.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

156. Un principe très-simple mais très-fécond pour trouver les regles générales du calcul intégral est de choisir une différentielle générale d'un ordre quelconque, de la différentier en supposant la différence d'une des variables constante ou en faisant tout varier, & d'en déduire ensuite les

regles pour réduire cette différentielle à celle d'un ordre inférieur qu'on avoit choisie.

157. Soit $p\,dx$ la différentielle générale du premier ordre à une seule variable x, dans laquelle on suppose que p est une fonction quelconque de x. En différentiant la proposée, l'on aura $p\,ddx + p'\,dx^2$ pour sa différentielle du second ordre, p' étant encore une fonction de x * & $p' = \frac{dp}{dx}$; donc une différentielle du second ordre à une seule variable x avec dx aussi variable, sera intégrable si on peut la réduire à la forme $p\,ddx + p'\,dx^2$, & si en même tems l'on a $p' = \frac{dp}{dx}$, autrement elle ne sera pas intégrable ; si elle donne ces conditions, son intégrale sera $p\,dx$.

Soit la différentielle $(ax^2 + bb\,x + cx^{-3})ddx + (2ax + b^2 - 3cx^{-4})\,dx^2$ en la comparant avec la formule générale, on trouve $p = ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, $p' = 2ax + b^2 - 3cx^{-4}$, & $\frac{dp}{dx} = \frac{2ax\,dx + b^2\,dx - 3cx^{-4}\,dx}{dx} = 2ax + b^2 - 3cx^{-4} = p'$; donc la différentielle proposée est intégrable & son intégrale est $p\,dx = (ax^2 + b^2x + cx^{-3})\,dx$. Si on vouloit l'intégrale de $p\,dx$, on trouveroit $\frac{ax^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2} - \frac{cx^{-2}}{2} + C$.

* Si l'on avoit $p' = a^2 + b^2 = x^0(a^2 + b^2)$, p' seroit une fonction de x, mais de dimension nulle.

158. Soit $p\,ddx + p'\,dx^2$ la différentielle générale du second ordre à une seule variable x réductible ou non réductible au premier ordre. Si on la différencie en faisant varier x, dx & ddx, on trouvera $pd^3x + ddx\,dp + 2p'\,dx\,ddx + dx^2\,dp' = pd^3x + p''\,dxddx + 2p'\,dxddx + p'''\,dx^3$ (A), en supposant $dp = p''\,dx$, & $dp' = p'''\,dx$, ou $p'' = \frac{dp}{dx}$ & $p''' = \frac{dp'}{dx}$. Ainsi étant proposée une équation du troisième ordre à une seule variable x, on examinera si elle est réductible à la forme A, & en même tems si elle donne les équations $p'' = \frac{dp}{dx}$, $p''' = \frac{dp'}{dx}$; si elle n'a pas ces conditions, elle ne sera pas intégrable, si elle les donne, son intégrale sera $p\,ddx + p'\,dx^2$.

Soit la différentielle du troisième ordre $ax^3\,dddx + 3ax^2\,dx\,ddx + 2bx^2\,dx\,ddx + 2bxdx^3$. En la comparant avec la formule générale, on trouve $p = ax^3$, $p'' = 3ax^2$, $p' = bx^2$, $p''' = 2bx$. On trouve aussi les égalités $p'' = \frac{dp}{dx}$, $p''' = \frac{dp'}{dx}$; car $\frac{dp}{dx} = \frac{3ax^2\,dx}{dx} = 3ax^2 = p''$, & $\frac{dp'}{dx} = \frac{2bx\,dx}{dx} = 2bx = p'''$; donc l'équation proposée a les conditions requises, & son intégrale est $p\,ddx + p'\,dx^2 = ax^3\,ddx + bx^2\,dx^2$. On pourroit trouver quelque difficulté dans la comparaison de la différentielle

proposée avec la formule générale : car cette formule étant exprimée ainsi $p d^3 x + (p'' + 2 p') dx ddx + p''' dx^3$, & la différentielle proposée de cette manière $a x^3 d^3 x + (3 ax^2 + 2 bx^2) dx ddx + 2 bx dx^3$, on trouveroit d'abord $p = a x^3$ & $p''' = 2 b x$. Mais on pourroit être embarrassé à trouver les valeurs de p'' & de p' par l'équation $p'' + 2 p' = 3 a x^2 + 2 b x^2$. Cette difficulté disparoît en faisant attention aux équations $p'' = \frac{dp}{dx}$, & $p''' = \frac{dp'}{dx}$ qui doivent avoir lieu lorsque la différentielle est intégrable ou réductible au second ordre : car puisqu'on a déja trouvé $p = a x^3$, & que l'on doit avoir $p'' = \frac{dp}{dx}$, l'on aura $p'' = 3 a x^2$; & par conséquent $2 p' = 2 b x^2$ & $p' = b x^2$. On peut appliquer ces réflexions à tous les cas.

Si l'on suppose que la seconde différence ddx soit constante, $d^3 x$ sera $= 0$, & la formule générale deviendra $(p'' + 2 p') dx ddx + p''' dx^3$, & l'on aura les équations $p''' = \frac{dp'}{dx}$; & $p'' = \frac{dp}{dx}$. Dans cette même supposition la différentielle précédente sera $(3 a x^2 + 2 b x^2) dxddx + 2 b x dx^3$. En la comparant avec la formule générale, on a $p''' = 2 b x$, & $p'' + 2 p' = 3 ax^2 + 2 b x^2$, & par l'équation $p''' = \frac{dp'}{dx}$, ou $p''' dx = dp'$, on a $2 b x dx = dp'$; donc en intégrant,

$bx^2 = p^I$; donc $2p^I = 2bx^2$; donc par l'équation $p^{II} + 2p^I = 3ax^2 + 2bx^2$, l'on a $p^{II} = 3ax^2$. Mais $p^{II} = \frac{dp}{dx}$, ou $p^{II}dx = dp$; donc $3ax^2dx = dp$, & $ax^3 = p$; ainsi l'intégrale de notre équation sera $pddx + p^Idx^2 = ax^3ddx + bx^2dx^2$. Il est facile d'appliquer cette méthode à une différentielle du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé, pourvu qu'il n'y ait qu'une seule variable.

159. On a souvent besoin sur-tout dans les questions *de maximis & minimis*, de supposer une différentielle égale à o. Lorsque cette différentielle est du premier ordre & ne contient qu'une seule variable x, on peut la représenter par pdx ; si l'on fait $pdx = 0$, on aura en divisant par dx, l'équation $p = 0$, qui fera connoître x. Mais si l'équation différentielle contient des différences des ordres supérieurs, on cherchera si la différentielle qu'on a égalée à o, est intégrable par la méthode qu'on vient d'expliquer ; & on l'intégrera si cela est possible ; mais si la méthode ne réussit pas, on la multipliera par un facteur m qu'on supposera être une fonction de x, & l'on tâchera de déterminer m par les conditions requises pour que le produit soit une différentielle exacte.

160. Toutes les équations du second ordre à une seule variable x, sont intégrables par cette méthode : car en multipliant par m l'équation générale du second ordre à une seule variable $pddx + p^Idx^2 = 0$, on a $mpddx + mp^Idx^2 = 0$. Pour que le premier membre de cette équation soit

une intégrale exacte, selon ce qu'on a dit ci-dessus (157), on doit avoir $mp^1 dx = d(mp) = mdp + pdm$, & l'intégrale cherchée sera $mpdx = 0$. De l'équation $mp^1dx = mdp + pdm$, on titre $\frac{dm}{m} = \frac{p^1dx - dp}{p} = \frac{p^1dx}{p} - \frac{dp}{p}$, & en intégrant, $L.m = S.\frac{p^1dx}{p} - L.p$, ou $L.m + L.p = S.\frac{p^1}{p}dx$, $L.mp = S.\frac{p^1}{p}dx\,L.e$ (en supposant $L.e = 1$); donc $pm = e^{S.\frac{p^1dx}{p}}$, & $m = \frac{e^{S.\frac{p^1dx}{p}}}{p}$; & partant l'intégrale cherchée sera $e^{S.\frac{p^1dx}{p}}dx = 0$, & en divisant par dx, $e^{S.\frac{p^1dx}{p}} = 0$, si on intégre l'équation $e^{S.\frac{p^1dx}{p}}dx = 0$, on aura $S.e^{S.\frac{p^1dx}{p}}dx = C$ constante.

Mais il y a une infinité de différentielles à une seule variable & des ordres supérieurs, qu'on ne peut réduire à un ordre inférieur, même en les multipliant par un facteur m.

La différentielle générale du second ordre à une seule variable x, peut facilement se réduire à la forme d'une différentielle du premier ordre à deux variables x & y: car en supposant $ddx = dy$, & par conséquent $dx = y$, & substituant, on changera la différentielle $pddx + p^1dx^2$ en $pdy + p^1ydx$. On pourra chercher l'intégrale

de la transformée par les méthodes que nous avons données pour ces sortes d'équations, & en remettant ensuite dx pour y dans cette intégrale, elle deviendra une différentielle du premier ordre à une seule variable x.

La différentielle du troisième ordre à une seule variable x, qu'on peut représenter par la formule $pd^3x + p'dxddx + p''dx^3$ se réduit à une différentielle du second ordre à deux variables x & z en faisant $d^3x = ddz$, $ddx = dz$ & $dx = z$, ce qui change la proposée en $pddz + p'dxdz + p''zdx^2$. Si dans celle-ci on fait $ddz = du$, & $dz = u$, elle deviendra $pdu + p'zdz + p''z^2dx$, en faisant attention que l'on a $dx = z$. On pourra faire les mêmes raisonnemens pour une différentielle à une seule variable & d'un ordre quelconque qu'on pourra toujours réduire aux ordres inférieurs & même au premier ordre.

161. A & B étant supposés des fonctions de x & de y, la différentielle du premier ordre à deux variables peut être représentée par la formule $Adx + Bdy$. En différentiant cette formule, l'on aura $Addx + dA.dx + Bddy + dB \times dy$, & en supposant que A', A'', B', B'' soient encore des fonctions de x & de y, & que $dA = A'dx + A''dy$ & $dB = B'dy + B''dx$, on aura la différentielle générale du second ordre, & à deux variables $Addx + A'dx^2 + (A''+B'')dxdy + Bddy + B'dy^2$, qui sera réductible au premier ordre lorsqu'on aura les deux équations de condition $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B''dx$, & l'on trouvera d'abord les deux termes

$Addx$

$A\,ddx$, $B\,ddy$ de la formule générale ; en comparant ceux de la différentielle proposée où se trouvent les différentielles ddx, ddy ; & l'intégrale de la proposée sera $A\,dx + B\,dy$. On s'en assurera en différentiant cette intégrale, & l'on doit faire la même chose quand il s'agit des différentielles à une seule variable : car si l'on ne retrouvoit pas la différentielle proposée, la proposée ne seroit pas intégrable, du moins dans l'état où elle est.

Soit l'équation $ax^2 yddx + 2ayxdx^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2)dxdy + b^2x^3y^2ddy + 2bbxxydy^2$, en comparant, l'on a $A\,ddx = ax^2yddx$; donc $A = ax^2y$. L'on trouve de même $B = b^2x^3y^2$; & l'intégrale cherchée $A\,dx + Bdy$ est $= ax^2ydx + b^2x^3y^2dy$. En effet en différentiant cette intégrale, on retrouve la différentielle proposée.

Si dans la différentielle $A\,dx + B\,dy$ on avoit supposé dx constant, dans ce cas l'on auroit $ddx = 0$, & la différentielle générale du second ordre en effaçant le terme $A\,ddx$, deviendroit $A'\,dx^2 + (A'' + B'')\,dxdy + B\,ddy + B'\,dy^2$. Cette formule sera réductible à une différentielle du premier ordre $A\,dx + B\,dx$, lorsqu'on aura les deux équations de condition $dA = A'\,dx + A''\,dy$, & $dB = B'\,dy + B''\,dx$. En comparant la dernière formule générale avec une différentielle proposée dans laquelle dx seroit constant, on trouvera facilement la valeur de B, & par la comparaison du terme $A'\,dx^2$ avec son correspondant, on aura la valeur de A'. On in-

tégrera la différentielle $A' dx$, en regardant x seul comme variable, l'intégrale sera $= A$, & en substituant les valeurs de A & de B dans la différentielle $A dx + B dy$, on aura l'intégrale cherchée, pourvu qu'en différentiant de nouveau, l'on retrouve la différentielle proposée.

Soit la différentielle $2ayxdx^2 + (ax^2 + 3bx^2) dxdy + bx^3 ddy$. En la comparant avec la dernière formule générale, on trouve $B' = 0$, c'est-à-dire, on trouve que le terme correspondant au terme $B' dy^2$ manque; on trouve aussi $B = bx^3$ & $A' = 2ayx$; donc $A' dx = 2ayxdx$, & en intégrant dans la supposition de y constant, on trouve $A = ayxx$; donc l'intégrale sera $ayx^2 dx + bx^3 dy + C dx$ qui est exacte, car en différentiant cette intégrale, on retrouve la proposée. On ajoute $C dx$, parce que ce terme peut avoir disparu en différentiant dans la supposition de dx constant; C est une constante arbitraire qu'on détermine par la nature du problême.

Comme cette matière est très-intéressante, nous croyons devoir encore ajouter quelques observations en faveur des commençans.

Soit V une fonction de deux variables x & y, de manière que l'on ait $dV = A dx + B dy$ & $ddV = A ddx + 2C dxdy + D dx^2 + E dy^2 + B ddy$. Il est visible qu'on doit avoir les quatre équations de condition $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$, $C = \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$.

Car, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (88), ſi $dV = A\,dx + B\,dy$, on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; mais $d^2 V = A\,ddx + dA\,dx + Bddy + dB\,.\,dy$. Faiſant $dA = D\,dx + C\,dy$, & $dB = M\,dx + E\,dy$, on aura $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = C$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Mais $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; donc $C = M$, & $dB = C\,dx + E\,dy$. Subſtituant les valeurs de dA & dB, il vient $ddV = A\,ddx + 2\,C\,dx\,dy + D\,dx^2 + E\,dy^2 + B\,ddy$.

COROLLAIRE. Donc une différentielle à deux variables dans laquelle on ne ſuppoſe aucune différence conſtante aura une intégrale finie ſi l'on a les quatre équations de condition dont on vient de parler, & ſon intégrale du premier ordre ſera $A\,dx + B\,dy$, en ajoutant une conſtante.

Si l'on propoſoit donc d'intégrer la formule $\frac{ddy}{x} - \frac{2\,dx\,dy}{x^2} + \frac{2\,y\,dx^2}{x^3} - \frac{y\,ddx}{x^2}$, en comparant cette différentielle avec la formule $A\,ddx + 2\,C\,dx\,dy + D\,dx^2 + E\,dy^2 + B\,ddy$ (H), on trouvera $A = -\frac{y}{x^2}$, $D = \frac{2\,y}{x^3}$, $C = -\frac{1}{x^2}$, $E = 0$, $B = \frac{1}{x}$. Donc $\frac{(dA)}{dy} = -\frac{1}{x^2}$, $dB = -\frac{1}{x^2}$, & $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; $C = -$

$\frac{1}{x^2} = \frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; $\frac{(dA)}{dx} = -\frac{2y}{x^3} = D$; $\frac{(dB)}{dy} = o = E$. Ainsi la proposée a une intégrale finie; la première intégrale est $Adx + Bdy = \frac{-ydx + xdy}{x^2}$.

A l'égard de la seconde intégrale, il est facile de voir qu'elle est égale à la fraction $\frac{y}{x}$ plus une constante c.

Si une des différentielles dx, dy est supposée constante, dans ce cas l'on aura $ddx = o$, ou $ddy = o$; donc on aura, ou A, ou B = o, & par conséquent on ne sauroit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$: Si l'on suppose $ddx = o$, & qu'on efface le premier terme dans la formule H, on aura la formule $2Cdxdy + Edy^2 + Ddx^2 + Bddy$. Mais $\frac{(dA)}{dx} = D$; donc $\frac{(dA)dx}{dx} = Ddx$, & S. $Ddx = A + G$, G étant une quantité qui peut contenir une fonction de y, parce qu'on suppose y constant dans $\frac{(dA)}{dx}$. Pour connoître G, on fera attention à l'équation $\frac{(dA)}{dy} = C$, qui indique qu'on doit ajouter à A une quantité G qui donne $\frac{(dA)}{dy} = C$. Si cette équation a lieu sans qu'on soit obligé de rien ajouter à A, dans ce cas on n'ajoutera rien à la

quantité A. On doit ensuite examiner si les trois autres équations ci-dessus peuvent avoir lieu.

Soit proposée la différentielle $2adxdy + axddy + 2bdx^2$, comparant cette différentielle avec la formule H, je trouve $D = 2b$, $C = a$, $E = 0$, $B = ax$. On a donc $S. D\,dx = 2bx + G$, mais $\frac{(dA)}{dy} = 0 = C$, ce qui est absurde. Afin donc que $\frac{(dA)}{dy}$ devienne $= C = a$, on doit supposer $G = ay$, & $A = 2bx + ay$. On a ensuite $\frac{(dB)}{dx} = a = \frac{(dA)}{dy}$, & $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$. Ainsi la différentielle proposée résulte de la différenciation d'une quantité finie. Ajoutant donc à la proposée la quantité $A\,ddx = (2bx + ay)\,ddx$, son intégrale sera $= (2bx + ay)dx + axdy + g$ constante.

Il est bon de remarquer que la quantité g doit renfermer dx lorsqu'on a fait cette différentielle constante, mais elle contiendra dy lorsqu'on aura fait $ddy = 0$.

Soit la formule $A\,ddx + 2C\,dx\,dy + D\,dx^2 + E\,dy^2 + B\,ddy$, dans laquelle on n'ait pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Supposons que l'intégrale de la proposée soit $= A\,dx + B\,dy$ (en ajoutant une constante), dont la différentielle $dA.dx + Addx + Bddy + dB.dy$ (T) doit être égale à

la proposée. C'est pourquoi je fais $dA = D\,dx + N\,dy$, & $dB = M\,dx + E\,dy$; d'où je tire $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = N$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Car dans ce cas l'on ne peut pas faire $N = M$, puisqu'on ne suppose pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Substituant les valeurs de dA & de dB que donnent ces équations dans la formule T, il vient $A\,ddx + N\,dy\,dx + D\,dx^2 + M\,dy\,dx + E\,dy^2 + B\,ddy$, quantité qui ne peut être égale à la différentielle proposée qu'autant que l'on aura $M + N = 2C$. Si les deux différentielles ddx, ddy s'y trouvent, l'intégrale sera très-facile à trouver ; car pour avoir lieu il suffit qu'on ait $2C = M + N = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$. Si ces équations ont lieu l'intégrale sera $A\,dx + B\,dy$.

Mais l'intégration sera bien moins facile si ddx, ou ddy manquent, car alors ou A, ou B ne sont pas constans. Si ddx manque, la différentientielle aura la forme $D\,dx^2 + 2C\,dy\,dx + E\,dy^2 + B\,ddy$. Mais $2C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$ (P) ; donc $2C - \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$. Ayant trouvé par le moyen de cette équation la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, l'ayant

multipliée par dy & intégrée dans la ſuppoſition de x conſtant, on aura A + G. Mais parce que dans cette intégration on a ſuppoſé x conſtant, il peut ſe faire que G ſoit une fonction de x; c'eſt pourquoi il faut trouver de nouveau la valeur de A par l'équation $D = \frac{(dA)}{dx}$, ou $S. D dx = A$, en regardant maintenant x comme variable. Si ces deux valeurs de A ne ſont pas les mêmes, on doit les ajouter enſemble, afin d'avoir la valeur de A corrigée. Si 2 C ne renferme pas $\frac{(dB)}{dx}$, l'équation P de condition n'aura pas lieu. Enfin l'on doit avoir $E = \frac{(dB)}{dy}$, & alors l'intégrale cherchée ſera $A dx + B dy + g dx$ (en écrivant $g dx$ au lieu de g).

Soit propoſé d'intégrer la différentielle $2axdx^2 - bx^2dy^2 - 2byxdxdy + 2cydydx - bx^2yddy$, dans laquelle on ſuppoſe dx conſtant, on aura $D = 2ax$, $-bx^2 = E$, $2cy - 2byx = 2C = M + N$, $-bx^2y = B$. Mais $\frac{(dB)}{dx} = -2bxy$; donc le terme $\frac{(dB)}{dx}$ ſe trouve renfermé dans 2 C, & de-là $\frac{(dA)}{dy} = 2C - \frac{(dB)}{dx} = 2cy$, & $A = S. 2cydy + G = cy^2 + G$. Mais $S. D dx = A - ax^2$; donc $A = ax^2 + cy^2$. Enfin on a $\frac{(dB)}{dy} = -$

$bx^2 = E$; donc l'intégrale cherchée est $(ax^2 + cy^2)\,dx - bx^2 y\,dy + g\,dx$.

Pour faire mieux comprendre aux commençans l'artifice de la méthode que nous venons de développer, soit l'équation $(a + bx^n)\,x^2\,ddy + (c + fx^n)\,x\,dx\,dy + (g + hx^n)\,y\,dx^2 = 0$. On aura donc $B = (a + bx^n)\,x^2$, $(c + fx^n)\,x = 2C$; $D = (g + hx^n)\,y$, & $E = 0$. On trouve à la vérité $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$, ce qui indique qu'on peut donner aux coefficiens a, b, c, &c. les valeurs convenables pour rendre la proposée intégrable. Mais l'on a $S.\,D\,dx = A = \left(gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1}\right)y$; ce qui doit donner $2C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy} = 2a.x + (n+2).bx^{n+1} + gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1} = cx + fx^{n+1}$. Pour que cette équation ait lieu, il faut qu'on ait $c = 2a + g$, $f = (n+2).b + \frac{h}{n+1}$. La substitution étant faite, l'équation proposée devient $(a + bx^n)\,x^2\,ddy + \left(2a + g + (n+2).bx^n + \frac{hx^n}{n+1}\right)x\,dx\,dy + (g + hx^n)\,y\,dx^2 = 0$; donc l'intégrale sera $A\,dx + B\,dy = \left(gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1}\right)y\,dx + (a + bx^n)\,x^2\,dy + C'\,dx = 0$; dans laquelle si $C' = 0$, il sera facile de séparer les variables.

Si $A\,dx + B\,dy = 0$ est susceptible d'une intégrale finie dans l'état où elle se trouve ; c'est-à-dire si l'on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou

$$gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1} = (n+2) \cdot bx^{n+1} + 2ax ;$$

ou $g = 2a$, $\frac{h}{n+1} = (n+2) \cdot b$, il ne sera pas difficile de trouver les valeurs de c & de f, qui étant substituées dans la proposée la rendront susceptible d'une intégrale finie.

Soit $Adx + Bdy + Ddz$, la différentielle générale du premier ordre & à trois variables A, B, D étant des fonctions quelconques des variables x, y, z. Si l'on différentie cette formule, on trouve $A\,ddx + dA \cdot dx + B\,ddy + dB \cdot dy + dD \cdot dz + D\,ddz$ (H). Supposons $dA = A'\,dx + A''\,dy + A'''\,dz$, (en faisant $A' = \frac{(dA)}{dx}$ * ; $A'' = \frac{(dA)}{dy}$; $A''' = \frac{(dA)}{dz}$), $dB = B'\,dx + B''\,dy + B'''\,dz$; (en faisant $B' = \frac{(dB)}{dx}$, $B'' = \frac{(dB)}{dy}$, $B''' = \frac{(dB)}{dz}$) ; & $dD = D'\,dx + D''\,dy + D'''\,dz$; il n'est pas difficile de trouver les valeurs de D', D'', D'''. Si l'on substitue dans la formule H les valeurs de

* Cette expression marque la différentielle de A prise en faisant varier seulement x & divisant le résultat par dx.

dA, dB, dD, qu'on vient de trouver, il viendra $A\,ddx + A'\,dx^2 + (A'' + B')\,dx\,dy + (A''' + D')\,dx\,dz + B\,ddy + B''\,dy^2 + (B''' + D'')\,dy\,dz + D\,ddz + D'''\,dz^2$ (P). Si on suppose une des différentielles constante, on effacera dans la formule P le terme où se trouve la différence de cette différentielle : ainsi si l'on suppose dx constant, l'on aura $ddx = 0$, le terme $A\,ddx$ disparoîtra, & le reste sera la formule générale convenable à la supposition de dx constant.

Soit la différentielle du second ordre à trois variables avec leurs premières différences aussi variables $ax^3y^2\,ddx + 3ay^2x^2\,dx^2 + (2ax^3y + bz^2)\,dx\,dy + bxz^2\,ddy + 2\,bxz\,dy\,dz$. En comparant cette différentielle à la formule P, on trouve $A = ax^3y^2$, $B = bxz^2$ & $D = 0$; donc l'intégrale, s'il y en a une, doit être $A\,dx + B\,dy = ax^3y^2\,dx + bxz^2\,dy$. En effet en différentiant cette intégrale, on trouve la différentielle proposée.

Il est aisé de voir comment on peut trouver des formules générales pour les différentielles des ordres supérieurs, à deux, ou à un plus grand nombre de variables pour en déduire les intégrales des différentielles d'un ordre quelconque.

162. L'on peut aussi en introduisant à la place de la plus haute différentielle de chaque variable une différentielle moins élevée d'une unité, réduire la proposée à une différentielle d'un ordre

inférieur, pour l'intégrer ensuite par les regles qui sont propres à cet ordre.

Soit, par exemple, la différentielle du second ordre $A\,dx^2 + A'\,dx\,dy + B\,ddy + B'\,dy^2$, en faisant $ddy = du$, & par conséquent $dy = u$, & $dx = c$ constante, on la réduira à la forme $Ac\,dx + A'c\,dy + B\,du + B'u\,dy$, différentielle du premier ordre à trois variables. On cherchera par les méthodes ci-dessus l'intégrale de cette différentielle ; supposons qu'elle soit trouvée, on y remettra dx au lieu de c, & dy au lieu de u, & l'on aura une différentielle du premier ordre à deux variables x & y qu'on tâchera d'intégrer de même. Si la proposée renfermoit ddx, on feroit $ddx = dz$, ou $dx = z$, & l'on parviendroit encore facilement à une différentielle d'un ordre inférieur. Au reste dans les équations des ordres supérieurs au premier, on peut supposer à volonté une première différence constante, & nous allons donner la méthode de rendre une des premières différences constantes, & réciproquement de rendre variables les premières différentielles dans les équations dans lesquelles on auroit supposé une constante,

Soit $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 + ddy = 0$, une équation différentielle du second ordre & à deux variables, dans laquelle la première différence dx est supposée constante. Pour la ramener à une différentielle qui ne renferme aucune différence constante, je divise la proposée par dx afin d'avoir $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} +$

$\frac{D.d(dy)}{dx} = 0$. Il eſt viſible qu'à cauſe de dx conſtant, l'on peut mettre $\frac{D.d(dy)}{dx}$ au lieu de $\frac{D.ddy}{dx}$. Si l'on veut que dx ſoit variable, on aura alors en différentiant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, & l'équation ſe changera en celle-ci, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D.\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, qui n'a aucune différence conſtante. Si on vouloit faire varier dx & rendre dy conſtant, on feroit $Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = D.\left(-\frac{dyddx}{dx^2}\right)$, en effaçant le terme $dxddy$, à cauſe de $ddy = 0$.

Soit l'équation du troiſième ordre $adx^3 + bdx^2dy + cdy^2dx + Ddy^3 + edxddy + fdyddy + gd^3y = 0$, dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant. En diviſant par dx^2, l'on trouve $adx + bdy + \frac{cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + \frac{eddy}{dx} + \frac{fdyddy}{dx^2} + \frac{gd^3y}{dx} = 0$, qu'on peut écrire ainſi $adx + bdy + \frac{cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + f.\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right) + g.d\left(\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$.

Si ſi dans cette équation on fait tout varier dans

les différenciations indiquées par la lettre d, on aura une équation du troisième ordre sans aucune première différence constante; & si dans les termes affectés du signe de différenciation, on suppose dy constant & dx variable, on aura une équation dans laquelle dy sera constant.

On peut faire les transformations précédentes par le moyen de quelques substitutions qui peuvent être d'un grand usage. Soient x & y les variables de l'équation proposée, on introduira une nouvelle variable p en supposant $p\,dx = dy$; on fait de plus $q dx = dp$, $r dx = dq$, ou $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c.; dx étant constant. Si on veut maintenant que dx & dy soient variables, on aura en différentiant, $dp = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, & par conséquent en divisant cette valeur de dp par dx & différenciant de nouveau, l'on trouvera $dq = \frac{dx^2 d^3 y - 3\, dx\, ddx\, ddy + 3\, dy\, ddx^2 - dx\, dy\, d^3 x}{dx^4}$ *; & ainsi de suite. Soit, par exemple, la différentielle $\frac{x\, ddy}{dx^2}$, dans laquelle dx est supposé constant. En faisant $p\,dx = dy$, $dp = q\,dx$, elle se change en qx, & en substituant la valeur de q elle devient $= \frac{x dx\, ddy - x dy ddx}{dx^3}$, différentielle qui ne contient plus aucune différence constante.

Soit la différentielle $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ dans laquelle

* L'expression ddx^2 marque le quarré de ddx.

on suppose $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante. En faisant $dy = p\,dx$ & $dp = q\,dx$, cette différentielle se réduit à la forme $\frac{(1+pp)^2}{q}$ & en substituant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, & $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$ au lieu de q, on aura $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dx^2\,ddy - dx\,dy\,ddx}$, expression qui ne renferme aucune différentielle constante. Si on vouloit au contraire rendre constant dx, par exemple, on supposeroit $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c. & l'on effaceroit les termes où se trouveroient ces différentielles. Si on vouloit dans une équation du troisième ordre rendre ddx constant, on effaceroit le terme qui contiendroit d^3x. Si on avoit supposé une différentielle, par exemple, dx constante dans une équation donnée, en la réduisant à une équation dans laquelle il n'y eût aucune différence constante, & faisant ensuite la différentielle de dy égale à 0, on réduiroit la proposée à une différentielle dans laquelle dy seroit constant.

163. Il peut arriver qu'une équation différentielle d'un ordre supérieur & à deux variables soit vague, c'est-à-dire, ne renferme aucun rapport certain entre les variables, ces sortes d'équations sont absurdes & ne peuvent avoir lieu dans la solution d'aucun problême. Etant donnée une équation qui ne renferme aucune variable constante, on supposera dx constant, & on réduira ensuite le résultat à une forme qui ne suppose aucune différence constante. Cela étant fait, on examinera si l'équation qui en résulte s'accorde

avec la propoſée. Si cela arrive, l'équation renferme un rapport déterminé entre x & y; dans le cas contraire ce rapport eſt vague: car il eſt viſible qu'il eſt libre de ſuppoſer conſtante telle différentielle que l'on voudra, & qu'en différenciant deux fois de ſuite, par exemple, dans cette ſuppoſition une équation finie entre x & y, le réſultat doit donner le même rapport que ſi l'on avoit ſuppoſé toutes les différences variables. Soit l'équation $bddx + fddy + gdx^2 + hdydx + kdy^2 = 0$, qui n'a point de différentielle conſtante, & dans laquelle b, f, g, h, k ſont des fonctions de x & de y. En faiſant dx conſtant, on a $fddy + gdx^2 + hdydx + kdy^2 = 0$. Si dans cette équation on ſubſtitue la valeur de ddy que donne la ſuppoſition de $pdx = dy$, & qu'on faſſe attention que $dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, & qu'alors $dp.dx = ddy = qdx = ddy - \frac{dyddx}{dx}$, l'on aura (en ſubſtituant cette quantité au lieu de ddy) l'équation $-\frac{fdyddx}{dx} + fddy + gdx^2 + hdydx + kdy^2 = 0$, qui ne differe de la propoſée que dans le premier terme. Il faut donc voir ſi l'on a $b = -\frac{fdy}{dx}$. Si cela arrive, l'équation propoſée exprimera un rapport déterminé entre x & y, autrement l'équation ſera abſurde. Il eſt donc néceſſaire, afin que la propoſée ne ſoit pas abſurde, que

l'on ait $b+\frac{fdy}{dx}=0$, ou $bdx+fdy=0$; or cela peut arriver de deux manières, 1°. Si l'expression $-\frac{fdy}{dx}$ est identique avec b, c'est-à-dire si elle est non-seulement $=b$, mais est effectivement b. 2°. Si l'équation $bdx+fdy=0$, est l'équation différentielle du premier degré, qui étant différenciée, a donné la proposée: Dans ce cas cette équation sera l'intégrale de la proposée. On le reconnoîtra en différenciant cette équation; car le résultat doit donner la proposée.

Soit l'équation sans aucune différentielle constante $yyddx-xxddy+ydx^2-xdy^2+adxdy=0$. En comparant cette équation avec la formule générale précédente, on trouve $b=yy$, $-xx=f$, & l'équation $bdx+fdy=0$, devient $yydx-xxdy=0$. Si l'on différencie cette équation & qu'on l'égale à la proposée, on trouvera (B) $ydx^2-xdy^2+adxdy=2ydxdy-2xdxdy$. Mais l'équation $yydx-xxdy=0$, donne $dy=\frac{yydx}{xx}$; donc en substituant cette valeur de dy dans l'équation B, & divisant ensuite par dx^2, il viendra $y-\frac{y^4}{x^3}+\frac{ayy}{xx}=\frac{2y}{xx}-\frac{2yy}{x}$, ou $x^3-y^3+axy=2xyy-2xxy$ (A). Voyons maintenant si cette équation s'accorde avec l'équation $yydx-xxdy=0$. En différentiant l'équation A & faisant les opérations nécessaires, on

aura

aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax - 2xx + 4xy}$ (D); d'un autre côté l'équation $dy = \frac{yydx}{xx}$ donne $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$. Substituant dans l'équation D cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, ôtant la fraction, transposant & réduisant, il vient $3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$; d'où l'on tire $axy = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3$, mais de l'équation A, on tire $axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3$. Si l'on retranche cette dernière équation de la précédente, on trouvera $o = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$, équation qui peut se résoudre en celles-ci $o = y - x$, & $o = 2yy + yx + 2xx$, la première donne $y = x$ qui peut satisfaire à l'équation $dy = \frac{yydx}{xx}$; mais elle est incompatible avec l'équation finie $x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy$, à moins qu'on ne fasse $a = o$, ou qu'on ne suppose x & y constans : dans ce dernier cas $dx = o$, & $dy = o$, satisfont à toutes les équations différentielles à deux variables y & x; ce qui est absurde, & par conséquent l'équation proposée est absurde, du moins en supposant que a n'est pas $= o$.

Pour faire voir l'usage des transformations précédentes, soit proposée l'équation $dx^2dy - dy^3 = bdxddy + xdxddy$, dans laquelle on suppose dx constant, & qu'on ne voit pas tout

d'un coup être intégrable. Si nous rendons dx variable, en écrivant (par la méthode ci-dessus) $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (bdx + xdx)d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & supposant dy constant dans la quantité renfermée dans la parenthèse, nous aurons $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(bdx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, d'où l'on tire $dx^2 + xddx + bddx - dy^2 = 0$, dont on trouve facilement l'intégrale en faisant $ddx = dz$ & $dx = z$; car l'équation devient $zdx + xdz + bdz - dy^2 = 0$, dont l'intégrale est $zx + bz - ydy = 0$. Donc en remettant la valeur de z & ajoutant encore la constante Cdy du même ordre, l'intégrale complette sera $xdx + bdx - ydy + Cdy = 0$, & en intégrant de nouveau & ajoutant la constante C', on a $\frac{x^2}{2} + bx - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0$. On a fait l'intégrale de $dy^2 = ydy$, à cause de dy constant.

On n'a point de méthode générale pour connoître la quantité qui étant supposée constante, peut faciliter l'intégration, mais on réussira souvent par la méthode suivante. Il faut examiner s'il y a dans l'équation, deux ou un plus grand nombre de termes qui soient intégrables en les multipliant, ou en les divisant par un facteur commun; l'on supposera que l'intégrale de ces termes ainsi multipliés ou divisés, est constante.

Soit l'équation $2px^3dy^3 = dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy$, dans laquelle p est une fonction de x. Les deux termes $dx^2dy \pm$

$x\,dx\,ddy$ étant divisés par dx, donnent $dx\,dy + x\,ddy$, dont l'intégrale est $x\,dy$. Supposons donc que $x\,dy$ est $=$ C constante, on aura $x\,ddy + dy\,dx = 0$, & en multipliant par dx, on aura encore $xdxddy + dy\,dx^2 = 0$; donc l'équation proposée deviendra, après avoir effacé les termes $xdxddy + dx^2\,dy$, & divisé par $2x^3\,dy^3$, deviendra, dis-je, $p = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3\,dy^3}$. Or l'équation $x\,ddy + dx\,dy = 0$, donne $dy = \frac{-xddy}{dx}$ donc $p = \frac{-xdy^2ddy}{2x^3\,dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3\,dy^3} = \frac{-dy^2\,ddy - dydxddx}{2x^2\,dx\,dy^3}$. Mais $x\,dy = C$, par supposition; donc $dy = \frac{C}{x}$, & $p = \frac{-dyddy - dxddx}{2CCdx}$, ou $2p\,dx = \frac{-dyddy - dxddx}{CC}$; & en intégrant, $2\,S.\,p\,dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{2C^2} + C' = \frac{-dy^2 - dx^2}{2x^2\,dy^2} + C'$, en remettant à la place de C sa valeur $x\,dy$. Il est aisé de voir qu'on intégreroit de même en supposant que p est une constante.

Soit l'équation $xy.dx\,ddy - xy\,dy\,ddx = y\,dy\,dx^2 - yy\,d.p\,dy^2 - x\,dx\,dy^2$ dans laquelle p est une fonction de y; dans cette équation il y a trois termes $xy\,dx\,ddx + ydydx^2 -$

$xdxdy^2$, qui divisés par $yydy$ forment une différentielle complette $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$; dont l'intégrale est $\frac{xdx}{y}$. En prenant cette intégrale pour constante, & différenciant, il vient $\frac{yxddx + ydx^2 - xdx.dy}{yy} = 0$; donc en ôtant la fraction & multipliant par dy, on a $yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2 = 0$. En transposant le terme $-xydyddx$ dans l'équation proposée & effaçant ensuite dans le second membre les trois termes dont la somme $= 0$, il vient $xydxddy = -yydpdy^2$; donc $dp = \frac{-xdxddy}{ydy^2}$, dont l'intégrale est $p = \frac{xdx}{ydy} + C$, comme il est évident, $\frac{xdx}{y}$ étant supposé constant.

On peut quelquefois intégrer facilement en supposant constant le produit de plusieurs différentielles. Soit, par exemple, l'équation $\frac{-addy}{dy^3} = \frac{ddx}{dyddx} + \frac{bddydddy}{dy^2ddx^2}$. Si on suppose le produit $dyddx$ constant, tous les termes sont intégrables & l'on a $\frac{a}{2dy^2} = \frac{dx}{dyddx} + \frac{bddy^2}{2dy^2ddx^2} + \frac{C}{dy^{\frac{2}{3}}ddx^{\frac{2}{3}}}$, en ajoutant la constante $\frac{C}{dy^{\frac{2}{3}}ddx^{\frac{2}{3}}}$ de même ordre que l'intégrale.

164. Pour que les commençans ne soient point embarrassés en voulant intégrer une différentielle d'un ordre supérieur, nous allons donner la regle suivante :

Faites attention aux variables dont les différences se trouvent dans la différentielle proposée ; rassemblez dans une somme totale les termes affectés de la différence d'une même variable, en commençant par ceux où se trouve la différence de l'ordre le plus élevé ; intégrez ensuite cette somme comme si toutes les autres variables étoient constantes ; différenciez l'intégrale qui en résultera, en faisant varier successivement toutes les variables qu'elle renferme, & retranchez le résultat de la proposée. S'il ne reste rien, l'intégrale trouvée sera celle qu'on cherchoit, en lui ajoutant une constante de son ordre. S'il y a un reste, regardez le reste comme une différentielle proposée, & suivez, à l'égard de ce reste, le même procédé, & ainsi de suite s'il y a un second reste, &c. Ajoutez toutes ces intégrales & la constante du même ordre & vous aurez l'intégrale cherchée. On pourra suivre le même procédé lorsque la différentielle sera égalée à o, pourvu qu'elle soit intégrable dans l'état où elle est.

Soit la différentielle $x^3y^2ddy + 2x^2ydxdy + 2x^3ydy^2 + 2xy^2dx^2 + 3x^2y^2dydx$, dans laquelle on suppose dx constant. On doit considérer cette différentielle comme renfermant trois variables dy, x, y, puisque ddy, dx & dy sont les différences premieres de dy, x & de y. Le terme x^3y^2ddy est celui où se trouve la différence de l'ordre le plus élevé, dont je

prends l'intégrale en regardant dy seul comme variable, cette intégrale est $x^3 y^2 dy$, dont la différentielle, en faisant tout varier, est $x^3 y^2 ddy + 2x^3 y dy^2 + 3y^2 x^2 dx dy$. Retranchant ce résultat de la proposée, il reste $2x^2 y dx dy + 2xy^2 dx^2$. Regardant ce reste comme une différentielle proposée à deux variables y & x, on prendra l'intégrale du terme $2x^2 y dx dy$, en supposant que y seul est variable, & l'on aura, à cause de dx constant, $x^2 y^2 dx$, dont la différentielle, en faisant varier y & x, est $2x^2 ydxdy + 2y^2 x dx^2$; donc l'intégrale cherchée sera $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + C dx$. En ajoutant la constante $C dx$ du même ordre, on n'ajoute pas $C dy$ au lieu de $C dx$, parce que dy n'étant pas supposé constant, la différentielle de $C dy$ n'auroit pas été $= 0$, & par conséquent se seroit trouvée dans la proposée.

765. Il arrive souvent qu'en ajoutant ou en retranchant une même quantité on peut facilement intégrer une équation. Soit, par exemple, l'équation $x ddy - y ddx = 0$, qu'on ne peut intégrer dans cet état. Mais en ajoutant & retranchant $dx dy$, l'on aura $x ddy + dx dy - y ddx - dx dy = 0$, dont l'intégrale est $x dy - y dx$. On n'ajoute point de constante, parce qu'aucune différence n'a été supposée constante.

Soit l'équation $fx ddy - fy ddx = bddy + a ddx$, ajoutant & retranchant dans le premier membre la quantité $f dx dy$, l'on trouve $fx ddy + f dy dx - fy ddx - f dx dy = bddy$

$+ a\,ddx$, dont l'intégrale eſt $\int x\,dy - \int y\,dx = b\,dy + a\,dx$.

REMARQUE. Nous n'ajoutons pas ici de conſtante du même ordre, parce que la propoſée ne contenant aucune différentielle conſtante, la différentielle de cette conſtante n'auroit pas pu s'évanouir par la différenciation. On doit faire attention à cette remarque qui fait une exception à la regle ci-deſſus.

166. On peut quelquefois par la multiplication ou la diviſion, trouver facilement l'intégrale d'une équation propoſée. Soit l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1}{y}$. En multipliant par dy, l'on aura $\frac{dy\,ddy}{dx^2} = \frac{dy}{y}$, dans cette équation dx eſt ſuppoſé conſtant. En intégrant & ajoutant une conſtante C, il vient $\frac{dy^2}{2dx^2} + C = L.y$, ou $dy^2 + 2C\,dx^2 = 2dx^2\,L.y$. On ajoute une conſtante qui ne contient point de différentielle, parce qu'en multipliant enſuite par $2dx^2$, l'on a la conſtante $2C\,dx^2$ qui contient une différentielle.

Soit l'équation $y^2\,ddy = x\,dx\,dy - y\,dx^2$, dans laquelle on ſuppoſe dx conſtant. En diviſant par y^2, il vient $ddy = a.\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}$, en écrivant a au lieu de la conſtante dx; donc en intégrant, on aura $dy = -a\frac{x}{y} = -\frac{x\,dx}{y} + C\,dx$, en ajoutant une conſtante & remettant la valeur de a.

167. Il eſt ſouvent utile d'employer les ſubſtitutions pour intégrer les équations différentielles des degrés ſupérieurs. Soit, par exemple, l'équation $(y-a).d^3x + (a-x).d^3y + dyddx - dxddy = 0$. Si on ſuppoſe $dy = dx - dp$, ou $y = x - p$ & qu'on ſubſtitue dans la propoſée les valeurs de y, dy, ddy, d^3y que donne cette ſuppoſition, on trouvera en effectuant les multiplications indiquées, réduiſant & tranſpoſant, l'équation $xd^3p + dxddp - pd^3x - dpddx = ad^3p$, dont l'intégrale eſt $xddp - pddx = addp$, & en intégrant de nouveau, $xdp - pdx = adp$. Si l'on vouloit intégrer cette équation du premier ordre, on le pourroit en diviſant par $-pp$, ce qui donneroit $\frac{-xdp+pdx}{pp} = \frac{-adp}{pp}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x}{p} = -\frac{a}{p} + C = \frac{Cp-a}{p}$. Mais on ne connoit point de méthode générale qui indique la ſubſtitution qu'il faut employer dans les différens cas. L'uſage & le tatonnement feront ſouvent réuſſir.

168. On emploie auſſi avec avantage la méthode de demi-ſéparation ; elle conſiſte pour les équations des ordres ſupérieurs à diſpoſer l'équation de manière que les différentielles ſoient toujours jointes aux quantités dont elles ſont les différentielles, en rejettant dans les multiplicateurs ou diviſeurs communs de la quantité ſéparée, les quantités qui empêchent l'intégration. On égale à une nouvelle variable l'intégrale de la quantité ſéparée, & au moyen de cette ſuppoſition on donne une nouvelle forme à la propoſée juſqu'à ce qu'on arrive à une

équation intégrable, ou qu'on connoisse que l'on ne peut intégrer la proposée par cette méthode. Au reste il faut quelquefois beaucoup d'art pour préparer les équations, afin qu'elles deviennent intégrables par cet artifice.

Soit l'équation $adz\,ddy - ady\,ddz = dx\,dz^2$. Je la dispose ainsi $\frac{dy}{dx}.\left(\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz}\right) = \frac{dz}{a}$. La quantité comprise dans la parenthèse étant intégrable, je fais $\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz} = \frac{dp}{p}$; donc L. dy — L. dz = L. p, ou L. $\frac{dy}{dz}$ = L. p, ou $\frac{dy}{dz} = p$; donc en substituant, $\frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p} = \frac{dz}{a}$ (A), ou $\frac{dp\,dz}{dx} = \frac{dz}{a}$ (à cause de $p = \frac{dy}{dz}$), & $dp = \frac{dx}{a}$. Donc $p = \frac{x}{a} + C$. Substituant ces valeurs de p & de dp dans l'équation A, & ôtant les fractions, l'on trouve $a\,dy = x\,dz + C\,adz$ qui est l'intégrale de la proposée.

Soit encore l'équation $xd^3y + 3dx\,ddy = -3dy\,ddx$, dans laquelle on suppose ddx constant; Pour la réduire à cette méthode, je la dispose ainsi: $xd^3y + dx\,ddy = -3dy\,ddx - 2dx\,ddy$, le second membre de cette équation est intégrable. Je donne à cette équation la forme $\left(\frac{d^3y}{ddy} + \frac{dx}{x}\right).\,xddy = -3dyddx - 2dxddy$; je fais ensuite $\frac{d^3y}{ddy} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$; ou L. $xddy$ = L. p, ou $p = xddy$. Donc notre équation devient $dp = -3dy\,ddx - 2dx\,ddy$, & en intégrant, $p = xddy = -yddx - 2dx\,dy$, équation qu'on pourra réduire au premier ordre: car on a $xddy + 2dxdy + yddx = 0$, & en intégrant encore $x\,dy + y\,dx = 0$, & en intégrant encore $xy = C$.

169. PROBLÊME. *Une équation différentielle d'un ordre quelconque étant supposée réductible à un ordre inférieur, intégrer cette équation.* On s'y prendra comme on a dit ci-dessus (164), & afin de pouvoir ajouter une constante chaque fois qu'on intégrera, on supposera une différence constante. Si cette méthode ne réussit pas, la proposée n'est pas complette : ainsi l'on peut par cette regle trouver si une différentielle, ou si une équation différentielle est complette ou non.

Nous allons maintenant donner la méthode de trouver le facteur qui peut rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre supérieur lorsque cela est possible : nous supposerons une des premières différences constante, ce qu'il est facile d'obtenir en effaçant dans la proposée tous les termes qui contiennent les différences de cette prémière différentielle.

170. Soit $A\,ddy + B = 0$, l'équation générale qui peut représenter toute différentielle à deux variables x & y, dans laquelle dx est constant, & qui ne contient d'autre seconde différence que ddy, avec des puissances quelconques des premières différences dx & dy, A & B étant des fonctions de x, y, dx & dy. On peut écrire ainsi cette équation $A\,ddy + \frac{(B-K)dy}{dy} + \frac{K}{dx}dx = 0$, qui est la même que la précédente. On multiplie cette équation par le facteur M, fonction de x, y, dx, dy pour avoir $M\,A\,ddy + M.\frac{(B-K)\,dy}{dy} + \frac{MK}{dx}dx = 0$ (P).

Supposant maintenant que cette équation est complette, & regardant y, x & dv comme autant de variables, & la différentielle P comme la même que celle-ci, $MAddy + MB'dy + MCdx = 0$, en supposant $B' = \frac{B - K}{dy}$, & $- C = \frac{K}{dx}$, on aura (par le N°. 98), les trois équations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB')}{ddy}$; $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d.MC)}{ddy}$; $\frac{(d.MB')}{dx} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou en remettant les valeurs de B' & de C, les trois suivantes $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{ddy}$ (a); $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{ddy}$; $\frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{dy}$, équation que je désigne par (b), comme j'ai désigné par (a) la premiere des trois dernieres.

La différentielle du produit $\frac{1}{dy}.M(B-K)$ prise en ne faisant varier que dy, après qu'on l'a divisée par ddy, est $= -\frac{1}{dy^2}.M(B-K) + \frac{1}{dy}.\frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy}.\frac{(d.MK)}{ddy}$; donc la première des trois équations ci-dessus devient $\frac{(d.MA)}{dy} = -\frac{1}{dy^2}.M(B-K) + \frac{1}{dy} \times$

$\frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy}.\frac{(d.MK)}{ddy}$ (R). La seconde équation étant la même que celle-ci $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{1}{dx}.\frac{(d.MK)}{ddy}$, donne $\frac{(d.MK)}{ddy} = dx.\frac{(d.MA)}{dx}$. Substituant cette valeur dans l'équation R, on trouvera après les opérations ordinaires $MK = MB - dy.\frac{(d.MB)}{ddy} + dxdy.\frac{(d.MA)}{dx} + dy^2 \times \frac{(d.MA)}{dy}$ (H), équation qui fera connoître K dès que M sera connu. Cette même équation donnera, en transposant, la valeur de $MB - MK$, ou de $M(B - K)$, & en substituant les valeurs de MK & de $M(B - K)$ prises dans cette équation, dans les équations ci-dessus *a* & *b*, on aura les deux équations suivantes.

$$\text{I. } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left[d.\left(\frac{(d.MB)}{dyy} - dx.\frac{(d.MA)}{dx} - dy.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{ddy} \text{ (T)}$$

$$\text{II. } \frac{\left[d.\left(\frac{(d.MB)}{ddy} - dy.\frac{(d.MA)}{dx} - dy.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{dx} = \frac{\left[d.\left(\frac{MB}{dx} - \frac{dy}{dx}.\frac{(d.MB)}{ddy} + dy\frac{(d.MA)}{dx} + \frac{dy^2}{dx}.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{dy} \text{ (V)*.}$$

* L'expression $\frac{(d.BM)}{ddy}$ signifie qu'on doit différentier MB en faisant varier seulement dy & diviser par ddy.

La queſtion eſt donc réduite à trouver pour M une fonction de x, dx, dy qui ſatisfaſſe aux équations T & V qu'on vient de trouver, ce qui n'eſt pas facile, & nous ne connoiſſons point de méthode générale pour réuſſir.

Nous nous contenterons d'examiner quelques équations très-étendues après avoir fait remarquer qu'en ſuppoſant $M = 1$ dans les équations précédentes, on aura les deux équations de condition néceſſaires, pour qu'une formule différentielle, ou encore une équation différentielle à deux variables x & y avec dx conſtant, ſoit intégrable dans l'état où elle eſt.

171. Soit propoſée l'équation du ſecond ordre $E dx^2 + F dx dy + G dy^2 + H ddy = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. E, F, G, H & le facteur M qui lui manque pour la rendre intégrable, ſont des fonctions de x & de y ſans dx, ni dy. En comparant cette équation à la générale, on aura $A = H$; $B = E dx^2 + F dx dy + G dy^2$; donc $MB = ME dx^2 + MF dx dy + MG dy^2$. Subſtituant les valeurs de A, M. B & de B dans les équations T & V, & faiſant attention que E, F, G, H, M ne renferment ni dx, ni dy, l'équation T deviendra $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$. Cette valeur de $\frac{(d.MH)}{dy}$ étant auſſi ſubſtituée dans l'équation V, on aura

$$\frac{\left[d.\left(MF dx + MG dy - dx. \frac{(d.MH)}{dx}\right)\right]}{dx} =$$

$\frac{\left[d.\left(\text{ME}\,dx+dy.\frac{(d.\text{MH})}{dx}\right)\right]}{dy}$. Si dans la première équation $\text{MG}=\frac{(d.\text{MH})}{dy}$, on différencie en faisant seulement varier x, & qu'on divise ensuite par dx, on aura $\frac{(d.\text{MG})}{dx}=\frac{\left[d.\left(\frac{(d.\text{MH})}{dy}\right)\right]}{dx}$. Si on substitue cette valeur de $\frac{(d.\text{MG})}{dx}$ dans la seconde équation, après avoir divisé chaque membre par dx, se souvenant que dx est toujours constant, & qu'on fasse attention que le dernier terme de chaque membre s'évanouit, on trouvera $\frac{(d.\text{MF})}{dx}-\frac{[d.(d.\text{MH})]}{dx\,dx}=\frac{(d.\text{ME})}{dy}$, entendant par cette expression qu'on doit différentier MH en faisant varier x & diviser ensuite par dx, puis différentier le résultat en faisant varier x & divisant encore par dx. Les équations $\frac{(d.\text{MF})}{dx}-\frac{[d.(d.\text{MH})]}{dx\,dx}=\frac{(d.\text{ME})}{dy}$ (A), & $\text{MG}=\frac{(d.\text{MH})}{dy}=\frac{\text{M}(d.\text{H})}{dy}+\frac{\text{H}(d.\text{M})}{dy}$ sont celles qu'il faut traiter pour intégrer la proposée.

Dans la derniere équation on regarde y seul comme variable. En ôtant le diviseur, transposant & divisant par MH, il vient $\frac{d\text{M}}{\text{M}}=\frac{\text{G}dy}{\text{H}}-$

$\frac{dH}{H}$. Si l'on prend l'intégrale en regardant y seul comme variable, puisque la différenciation a été faite dans cette supposition, on aura $L.M = S.\frac{Gdy}{H} - L.H + L.p$, $L.p$ est une fonction de x, parce qu'on a supposé x constant dans la différenciation. En multipliant $S.\frac{Gdy}{H}$ par $L.e = 1$, l'on aura $S.\frac{Gdy}{H}.L.e = L.e^{S.\frac{Gdy}{H}}$, & l'intégrale trouvée deviendra $M = \frac{p}{H} e^{S.\frac{Gdy}{H}}$. Si l'on substitue cette valeur de M dans l'équation A & qu'on divise par $e^{S.\frac{Gdy}{H}}$, on aura l'équation qui doit déterminer p. Mais p est une fonction de x sans y; donc dans l'équation qui doit déterminer p, tous les y doivent disparoître, autrement la proposée ne peut devenir complette par la multiplication d'un facteur M qui soit composé de x, de y & de constantes, ou qui soit une fonction de x & de y.

Soit $2ydx^2 + (2x + 3yx)\,dxdy + 2x^2dy^2 + x^2yddy = 0$, équation qui n'est pas complette, on aura $E = 2y$, $F = 2x + 3yx$, $G = 2x^2$, $H = x^2y$, $S.\frac{Gdy}{H} = S.\frac{2dy}{y} = L.y^2$, & $M = \frac{p}{x^2y} e^{L.y^2}$. Or

$e^{L.y^2} = y^2$: car $L.y^2. L.e = L.y^2$; donc $L.e^{L.y^2} = L.y^2$, & $e^{L.y^2} = y^2$; ainsi $M = \frac{py^2}{x^2 y} = \frac{py}{xx}$. Substituant cette valeur de M & celles de H, F, E, dans l'équation A, on trouvera, en transposant & réduisant, $\frac{2ydp}{xdx} - \frac{6yp}{x^2} + \frac{3y^2dp}{xdx} - \frac{3y^2p}{xx} - \frac{y^2ddp}{dx^2} = 0$. Egalant à 0 la somme des termes affectés de la même puissance de y, on aura les deux équations $\frac{2ydp}{xdx} - \frac{6yp}{x^2} = 0$, & $\frac{3y^2dp}{xdx} - \frac{3y^2p}{x^2} - \frac{y^2ddp}{dx^2} = 0$.



La première donne $\frac{dp}{p} = \frac{3dx}{x}$, & la seconde après avoir divisé par y^2 & ôté les fractions, donne $3xdpdx - 3pdx^2 - x^2ddp = 0$. La première équation étant intégrée, donne $L.p = 3L.x = L.x^3$; donc $p = x^3$. Cette valeur de p satisfait à la seconde équation ; on a donc $p = x^3$ & $M = \frac{py}{x^2} = xy$. Si l'on remonte à la valeur de MK & de M(B — K) que doit donner l'équation (H) ci-dessus, on aura $MK = 2xyydx^2 + 3x^2y^2dxdy$, & $M(B-K) = 2x^2ydxdy + 2x^3ydy^2$; de sorte que la

proposée

proposée étant rapportée à la forme générale $MAddy + M.\frac{(B-K)dy}{dy} + \frac{MK}{dx}dx = 0$, devient $x^3y^2ddy + (2xxydx + 2x^3ydy)dy + (2xyydx + 3x^2y^2dy)dx = 0$, équation complette & dont l'intégrale, en ajoutant une constante, est $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx = 0$.

Si après la substitution de la valeur de M' dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx}$ — &c. tous les y disparoissent d'eux mêmes, l'équation qui doit donner p est du second ordre, de manière qu'il paroît que dans ce cas la méthode ne fait rien connoître. Mais alors l'équation sera de cette forme $adx^2 + bpdx^2 + cdpdx + fddp = 0$; a, b, c, f étant des fonctions de x sans y. Pour intégrer cette équation on l'écrit ainsi $amdx^2 + bmpdx^2 + (c-k)mdxdp + kmdxdp + fmddp = 0$, qui est la même que la précédente multipliée par le facteur m. Supposant ensuite que m & k étant des fonctions de x sans y, les quatre derniers termes soient une différentielle complette; alors le premier terme qui ne contiendra qu'une seule variable x, s'intégrera aisément; de plus, cette supposition donnera (par le N°. 89) les équations $\frac{(d.fm)}{dx} = \frac{[d.(mkdp + bmpdx)]}{ddp}$; $\frac{(d.fm)}{dp} = \frac{[d.((c-k)m.dx)]}{ddp}$;

$$\frac{[d.(kmdp + bmpdx)]}{dp} = \frac{[d.(c-k)mdx]}{dx};$$

$$\frac{[d.(c-k)mdx)]}{dx} = \frac{[d.bmpdx]}{dp}.$$ Mais parce que a, b, k, m, ne renferment point p, la seconde équation donne $0 = 0$, ou eſt nulle ; la première ſe réduit à $\frac{(d.fm)}{dx} = km$, & la troiſième avec la quatrième, à cauſe de dx conſtant, ſe réduiſent à $\frac{(d.(c-k).m)}{dx} = bm$. De l'équation $\frac{(d.fm)}{dx} = km$, on tire $\frac{f.(d.m)}{dx} + \frac{m.(d.f)}{dx} = km$; & $\frac{dm}{m} = \frac{kdx}{f} - \frac{df}{f}$; donc $L.m = S.\frac{k}{f}dx - L.f + L.h$, h étant une conſtante. Donc en ſuppoſant $L.e = 1$, on aura $m = \frac{h}{f} \times e^{S.\frac{k}{f}dx}$. de l'équation $\frac{[d.(c-k)m]}{dx} = bm$ on tire aiſément $\frac{dm}{m} = \frac{bdx - d(c-k)}{c-k}$. En égalant cette valeur de $\frac{dm}{m}$ à celle qu'on vient de trouver ci-deſſus, on aura l'équation $\frac{bdx - d(c-k)}{c-k} = \frac{kdx - df}{f}$; donc $bfdx - fdc + fdk = (c-k).kdx - (c-k)df$, ou $bfdx - k(c-k)dx + (c-k)df - fdc +$

$fdk = 0$, équation différentielle du premier ordre dont dépend la valeur de k. Supposant qu'on ait déterminé k par le moyen de cette équation, on aura m par l'équation $m = \frac{h}{f} e^{S.\frac{k}{h}dx}$; k & m étant supposés connus, on aura p en mettant les valeurs de k & de m dans l'équation $amdx^2 + bmpdx^2 + (c-k)mdxdp + kmdxdp + fmddp = 0$, & en intégrant. Comme cette équation doit être complette, en lui donnant cette forme $(amdx + bmpdx + kmdp)dx + ((c-k).mdx)dp + fmddp = 0$, & regardant cette équation comme une différentielle complette à trois variables, x, p, dp, on peut prendre pour intégrale celle du premier terme $(amdx + bmpdx + kmdp)dx$, en supposant x seul variable & traitant dx, p & dp dans la parenthèse comme constans; ce qui donne pour l'intégrale, $dx. S. amdx + pdx. S. bmdx + dp\, S. kmdx + Cdx, = 0$ *, Cdx étant la constante ajoutée. Si on change maintenant p en y, on trouvera aisément que cette équation se rapporte à la forme de celle du (N°. 128); car en joignant ensemble le premier & le dernier terme, notre équation, sera réduite à trois termes.

* Il est aisé de voir que le terme mdx peut être écrit ainsi $dx. am$, multipliant par dx on aura $dx. amdx$, dont l'intégrale $= dx. S. amdx$, en regardant dx qui est devant le signe S, comme constant.

On aura donc la valeur de p : ainſi l'équation $E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2 + H\,ddy = 0$, ſera toujours réductible au premier ordre lorſqu'il ne lui manquera, pour être complette, qu'un facteur compoſé de x, y & conſtantes, ou de x & y; mais ſi après la ſubſtitution de la valeur de M dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx}$ &c. l'équation renferme des y qu'on ne puiſſe faire diſparoître ſans aſſujettir les coefficiens E, F, G, H, à certaines conditions, c'eſt une marque que le facteur doit renfermer des dx ou des dy, ou même des dx & des dy à la fois ; alors on aura recours à la méthode générale (170). On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas une équation différentielle du ſecond degré & d'une forme connue a beſoin d'un multiplicateur compoſé de x, y & conſtantes, ou de x & dy & conſtantes, &c.

172. Soit $Ad^3y + B = 0$, l'équation générale du troiſième ordre & à deux variables x & y dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant. Suppoſons que M fonction de x, y, dx, dy, ddy & de conſtantes, eſt le facteur qui peut rendre intégrable cette équation, on pourra l'écrire ainſi $AMd^3y + M.\frac{B-K}{ddy}ddy + M.\frac{K-H}{dy}.dy + \frac{MH}{dx}.dx = 0$. Suppoſant maintenant que cette équation eſt complette, on aura

$$\frac{(d.AM)}{ddy} = \frac{\left(d.M\frac{B-K}{ddy}\right)}{d^3y}; \frac{(d.AM)}{dy} = \frac{\left[d.\left(M.\frac{K-H}{dy}\right)\right]}{d^3y};$$

$$\frac{(d.\, A\, M)}{dx} = \frac{\left[d.\, \frac{MH}{dx}\right]}{d^3 y} ; \frac{\left(d.\, M\, \frac{B-K}{ddy}\right)}{dy} =$$

$$\frac{\left(d.\, M\, \frac{K-H}{dy}\right)}{ddy} ; \frac{\left(d.\, M\, \frac{B-K}{ddy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\, \frac{MH}{dx}\right)}{ddy} ;$$

$$\frac{\left(d.M\, \frac{K-H}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\, \frac{MH}{dx}\right)}{dy}.$$ A l'aide de ces équations on tâchera de déterminer K, H, & M, il eſt aiſé de voir comment on doit s'y prendre pour les équations des ordres ſupérieurs; mais le calcul ſera d'autant plus pénible que l'ordre de l'équation ſera plus élevé.

REMARQUE. Lorſqu'on voudra intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui ne ſera pas complette, on pourra la multiplier par un facteur M, lequel facteur pourra être une fonction p de x ou une fonction q de y, ou une fonction r de y & de x enſemble, ou renfermer dy & dx, ou ddy, $dddy$, dx^2, &c. Ainſi on pourra avoir différens ordres de facteurs pour les équations différentielles du ſecond ordre, tels que p ; $pdx + q\,dy$; $pdx^2 + qdx\,dy + p\,dy^2$ &c. Si la propoſée eſt du ſecond ordre, on pourra d'abord eſſayer ſi le premier facteur p réuſſit, s'il ne réuſſit pas, on eſſayera le ſecond : ſi celui-ci ne réuſſit pas, on aura recours au troiſième, &c. On peut voir maintenant comment on doit trouver les facteurs des équations du troiſième ordre & de celles qui ſont plus élevées ; mais il eſt aiſé de comprendre combien ces ſortes de recherches ſont pénibles lorſque les équations ſont d'un ordre un peu élevé.

DE QUELQUES MÉTHODES POUR INTÉGRER OU POUR RÉDUIRE AUX ORDRES INFÉRIEURS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS, LORSQU'ELLES ONT CERTAINES CONDITIONS.

173. Soit l'équation $ddy = \frac{xd^3y}{dx} + \frac{a^3dx^5}{d^3y}$, je suppose $d^3y = tdx^3 = cctdx$; en faisant $dx = c$. J'intégre en regardant dx comme constant, & j'ai $ddy = c^2$ S. $tdx = dx^2 S.tdx$; substituant dans la proposée les valeurs de ddy, & de d^3y qu'on vient de trouver, elle devient dx^2 S, $tdx = xtdx^2 + \frac{a^3dx^2}{t}$, ou en divisant par dx^2, S. $tdx = xt + \frac{a^3}{t}$. Donc en différenciant, $tdx = tdx + xdt - \frac{a^3dt}{t^2}$; ou $\left(x - \frac{a^3}{t^2}\right).dt = 0$ (H); d'où l'on tire $x - \frac{a^3}{t^2} = 0$, ou $t^2x = a^3$, ou $t = \frac{a\sqrt{(a)}}{\sqrt{x}} = \frac{d^3y}{dx^3}$, ou $2a\sqrt{a}.dx^2.\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d^3y$, & en intégrant, $2a\sqrt{a}.\sqrt{x}.dx^2 + Cdx^2 = ddy$; & en intégrant encore il vient $\frac{2.2a.\sqrt{a}.x^{\frac{3}{2}}}{3}.dx +$

$C x dx + B dx = dy$, $B dx$ est un constante ajoutée. Si on integre encore, on trouvera $\frac{2.2.2a\sqrt{a}.x^{\frac{5}{2}}}{3.5} + \frac{Cxx}{2} + Bx + D = y$. Substituant les valeurs trouvées de ddy & d^3y dans la proposée, on trouvera après les opérations ordinaires $2a\sqrt{a}.\sqrt{x} + C = 2a\sqrt{a}.\sqrt{x}$. Cette équation doit être identique, & par conséquent on a $C = 0$; donc notre intégrale devient $\frac{2.2.2a\sqrt{a}.x^{\frac{5}{2}}}{3.5} + Bx + D = y$. De l'équation H, on tire encore $dt = 0$; donc en intégrant $t = C = \frac{d^3y}{dx^3}$, ou $Cdx^3 = d^3y$; donc en intégrant, $Cxdx^2 + Bdx^2 = ddy$: en intégrant encore, il vient $\frac{Cx^2dx}{2} + Bxdx + Ddx = dy$; & enfin $\frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx + E = y$, équation qui appartient à une courbe du genre des paraboloïdes. Dans cette derniere équation il y a quatre constantes indéterminées; cependant l'intégrale complette d'une équation différentielle du troisième ordre ne doit renfermer que trois constantes indéterminées. Il faut donc en déterminer une par le moyen des autres; pour cela substituons dans la proposée les valeurs de ddy, & d^3y qu'on vient de trouver, il viendra après les opérations

ordinaires $Cx + B = Cx + \frac{a^3}{C}$. Cette équation devant être identique, fait voir que $B = \frac{a^3}{C}$; donc la vraie intégrale sera $\frac{Cx^3}{2.3} + \frac{a^3x^2}{2C} + Dx + E = y$.

Soit encore l'équation $ad^3y = \frac{xd^4y^2}{dx^5} + bdx^3$, on fera $d^4y = tdx$, & $d^3y = dx^3. S.tdx$. Les substitutions, en divisant par dx^3, donneront $aS.tdx = xtt + b$. Différenciez cette équation pour avoir $atdx = t^2dx + 2xtdt$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{a-t}$; donc en intégrant, ajoutant L. C au second membre & passant ensuite des logarithmes aux nombres, $a - t = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}$, ou $a - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}} = t$; donc $d^4y = dx^3. \left(adx - dx\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}\right)$, & en intégrant, $d^3y = dx^3. (B + ax - 2\sqrt{C}.\sqrt{x})$ (A). On substituera dans la proposée les valeurs de d^4y, d^3y, & l'on déterminera de cette manière les constantes C & B l'une par l'autre, & l'on aura après les opérations ordinaires $aB + a^2x - 2a\sqrt{C}.\sqrt{x} = a^2x - 2a\sqrt{C}.\sqrt{x} + C + b$, équation qui ne peut être vraie, à moins que aB ne soit $= C + b$, ou $B = \frac{C+b}{a}$. Après avoir déterminé la valeur de B en C, intégrons trois fois de suite l'équation A en ajoutant à chaque

fois une constante, on aura $y = F + Ex + \frac{Dx^2}{2} + \frac{Bx^3}{2.3} + \frac{ax^4}{2.3.4} - \frac{2.2.2.2\sqrt{C}.x^{\frac{7}{2}}}{3.5.7}$, équation qui, en substituant la valeur de $B = \frac{C+b}{a}$, sera l'intégrale complette de l'équation proposée. En général étant donnée une équation à trois termes de la forme $d^m y = xA + B$, dans laquelle A & B sont supposés des fonctions de dx, $d^{m+1}y$ & de constantes, on pourra l'intégrer en faisant $d^{m+1}y = tdx^{m+1}$, & en imitant ce qui vient d'être fait dans l'un ou l'autre des exemples précédens.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $d^3ydy + addy.ddy + bd^2ydy^2 + edy^4 = 0$, qui est la même que celle dont parle l'illustre M. d'Alembert, dans le tome VI de ses Opuscules, page 390, je ferois $dy = pdx$, dx étant constant, & $dx = qdp$; donc $ddp = -\frac{dqdp}{q}$. Substituant dans la proposée les valeurs de dy, ddy, d^3y, que donnent les suppositions, on a la transformée $-\frac{dq}{q} + \frac{adp}{p} + bpqdp + ep^3q^2dp = 0$, équation du premier dégré. Si l'on fait $\frac{p^a}{q} = z$, ou $p^a = zq$, ou $ap^{a-1}dp = zdq + qdz$, ou $dq = \frac{ap^{a-1}dp - qdz}{z}$, on aura la nouvelle transformée $\frac{dz}{z} + \frac{bp^{a+1}dp}{z} + \frac{ep^{3+2a}dp}{z^2} = 0$; & supposant enfin $p^{a+2} = t$, on aura la derniere trans-

formée $dz + b' dt + \frac{e' t dt}{z} = 0$, équation homogene dans laquelle b' & e' sont des constantes.

En faisant $\frac{t}{z} = u$, la derniere transformée se trouvera toute séparée. Or $\frac{t}{z} = \frac{qp^{a+2}}{p^a} = p^2 q$; donc $q = \frac{u}{p^2}$. Ainsi en supposant $dy = p dx$ & $dx = \frac{udp}{p^2}$, ou ce qui revient au même, en supposant $dy = \frac{dx}{dn}$, & $dx = -udn$, ce qui donne $p = \frac{1}{n}$, l'équation se trouvera toute séparée.

Si $a+1$ étoit $= -1$, ou $a = -2$, la solution précédente ne pourroit avoir lieu parce que pour lors $\int p^{a+1} dp$ dépend des logarithmes. Mais dans ce cas on feroit $q = p^h z$ (au lieu de faire $\frac{p^a}{q} = z$), & on auroit la transformée $-\frac{hdp}{p} - \frac{dz}{z} + \frac{adp}{p} + bp^{h+1} z dp + ep^{3+2h} z^2 dp = 0$, qui est homogene si l'on a $h+1+1 = -1$, & $3+2h+2 = -1$, ou si l'on a $h = -3$.

En général, soit $d^3 y$ le premier terme d'une équation composée de tant d'autres termes qu'on voudra $a (d^2 y)^k dy^m dx^{-m-2k+3} + a' (d^2 y)^{k'} \times dy^{m'} dx^{-m'-2k'+3}$ &c.; en supposant, comme ci-dessus, &c. $dy = pdx$, & $dx = qdp$, la tranformée sera $-\frac{dq}{q} + adp.p^m q^{-k+2} + a' dp.p^{m'} q^{-k'+2}$ &c. $= 0$. Soit $q = p^s z^t$, on aura la nouvelle transformée —

$\frac{s\,dp}{p} - \frac{t\,dz}{z} + a\,dp \cdot p^{m-ks+2s} \times z^{-kt+2t} + a'\,dp \cdot p^{m'-k's+2s} \times z^{-k't+2t}$ &c. $= 0$; équation qui sera homogene si $m - ks + 2s - kt + 2t = -1$, & si $m' - m's + 2s - k't + 2t = -1$; d'où l'on tire facilement $s + t = \frac{m - m'}{k - k'}$; & par conséquent si $\frac{m - m'}{k - k'}$ est une quantité constante dans tous les termes, comparés deux à deux, la proposée sera intégrable. Dans le cas de l'équation ci-dessus $d^3 y + addy \cdot ddy +$ &c. $= 0$, on a $m = -1$, $k = 2$, $m' = 1$, $k' = 1$, $m'' = 3$, $k'' = 0$; donc $\frac{m - m'}{k - k'} = -2$, & $\frac{m - m''}{k - k''} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$.

Dans l'équation $s + t = \frac{m - m'}{k - k'}$, on peut supposer à volonté t ou s tout ce qu'on voudra. Si, par exemple, on suppose $t = 0$, on fera $q = p^s$.

Par la même méthode si ddy est le premier terme d'une équation du second ordre dont les autres termes soient $+ a\,dy^k y^m dx^{2-k} + a'\,dy^{k'} y^{m'} dx^{2-k'}$ &c. On aura, en faisant $dx = q\,dy$, la transformée $-\frac{dq}{q} + a\,dy \cdot y^m q^{2-k} + a'\,dy \cdot y^{m'} q^{2-k'}$ &c. $= 0$; équation qui sera intégrable si $\frac{m - m'}{k - k'}$ est une constante; c'est pourquoi l'équation $d^2 dy + \frac{ady^2}{y} + bydydx + ey^3 dx^2 = 0$, est intégrable, & ainsi des autres.

174. PROBLÊME. *Soit l'équation* $dx^3 - dx\,dy^2 = y\,dx\,ddx + 2x\,dy\,ddy$, *qu'on propose de réduire au premier ordre.* En supposant dx constant on aura $y\,dx\,ddx = 0$, & la proposée

deviendra $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Faisons $dy = zdx$ pour avoir $ddy = dzdx$ & $dx^3 - z^2dx^3 = 2xzdx^2dz$, ou $dx - z^2dx = 2xzdz$, ou $\frac{dx}{2x} = \frac{zdz}{1-z^2}$; dont l'intégrale est $L.x = -L.(1-z^2) + L.C$, ou $x = \frac{C}{1-zz}$. Substituant dans cette intégrale la valeur de $z = \frac{dy}{dx}$, on trouve $x = \frac{Cdx^2}{dx^2 - dy^2}$.

Toutes les équations du troisieme ordre & à deux variables dans lesquelles les variables manquent peuvent s'intégrer par cette méthode.

Soit l'équation $dxd^3y + dx^2ddy = dx^4 + dy^4$, dans laquelle dx est constant, qu'on propose de réduire au premier ordre, je fais $dy = zdx$, ce qui donne $ddy = dxdz$, $d^3y = ddzdx$, & la proposée devient $ddzdx^2 + dx^3dz = dx^4 + z^4dx^4$, ou $ddz + dzdx = dx^2 + z^4dx^2$. Qu'on fasse maintenant $dz = pdx$, ou $ddz = dpdx$, on trouvera $dp + pdx = dx + z^4dx$; mais $dx = \frac{dz}{p}$; donc $pdp + pdz = dz + z^4dz$, dont l'intégrale donnera celle de la proposée.

En faisant $\frac{dy}{dx} = z$, ou $\frac{dx}{dy} = z$, & en substituant zdy au lieu de dx, ou zdx au lieu de dy, on peut souvent intégrer ou réduire à un ordre inférieur les équations différentielles à deux variables x & y, de quelque ordre quelles

ſoient. On ſe ſert de la première ſubſtitution lorſque la variable finie x ne ſe trouve pas dans l'équation, & de la ſeconde ſi la variable finie y manque dans la propoſée. Si la propoſée contient les différences ſupérieures ddy, d^3y, d^4y, &c. & que dx ſoit conſtant, on ſuppoſera $dy = zdx$, d'où l'on tire $ddy = dz\,dx$, $d^3y = ddz\,dx$, $d^4y = d^3z\,dx$, &c. Si au contraire l'équation contient les différences ddx, d^3x &c. & que dy ſoit conſtant, on fait $dx = z\,dy$, $ddx = dz\,dy$, &c.

175. PROBLÊME. *Intégrer l'équation différentielle à deux variables* $Ady^n + Bdx^n + Cdy^m dx^{n-m} + Ddy^p dx^{n-p} + Edy^q dx^{n-q} +$ &c. $= 0$, *dans laquelle les coefficiens* A, B, &c. *ſont des fonctions d'une ſeule variable* x, *ou* y *& de conſtantes, ou* 0. Si la variable finie, x ne ſe trouve pas dans la propoſée, on fera $dx = z\,dy$; donc en ſubſtituant cette valeur de dx & diviſant enſuite l'équation par dy^n, on aura l'équation finie à deux variables z & y, $A + Bz^n + Cz^{n-m} + Dz^{n-p} + Ez^{n-q} +$ &c. $= 0$, par laquelle on tâchera de déterminer z en y, on y en z. On ſubſtituera une de ces deux valeurs dans la différentielle $z\,dy$, & on aura $z\,dy = R\,dy$, ou $z\,dy = T\,dz$, R étant une fonction de y, & T une fonction de z, & l'équation $dx = z\,dy$, ſera changée en $dx = R\,dy$, ou $dx = T\,dz$; donc en intégrant on aura $x = S.\,R\,dy + C$, & $x = S.\,T\,dz$; la première intégrale donnera la valeur de x en y, & la ſeconde donnera la

valeur de x en z. Mais z étant une fonction de y comme le fait voir l'équation $A + Bz + \&c. = 0$, on pourra avoir aussi la valeur de x en y par la seconde intégrale combinée avec l'équation $A + Bz \&c. = 0$.

Si y manque dans l'équation, on fera $dy = zdx$: substituant cette valeur de dy dans la proposée & divisant ensuite par dx^{n} on aura l'équation finie $Az^{n} + B + Cz^{m} + Dz^{r} + Ez^{q}$ &c. $= 0$, par laquelle on tâchera de déterminer la valeur de z en x, ou celle de x en z, & substituant une de ces valeurs dans zdx, & procédant comme dans le premier cas, on trouvera la valeur de x en y au moyen de l'équation $dy = zdx$.

176. PROBLÊME. *Intégrer ou réduire au premier ordre l'équation générale du second ordre à deux variables* $Addy + Bdy^2 + C'dxdy + Ddx^2 = 0$, *dans laquelle* dx *est constant, & les coefficiens* A, B, *&c. sont des fonctions de l'une des variables* x, *ou* y *& de constantes, ou* 0. Puisque dx est constant, on fera $dy = zdx$; donc $ddy = dzdx$. Substituant ces valeurs dans la proposée & divisant par dx, il vient $Adz + Bz^2dx + C'zdx + Ddx = 0$, équation différentielle du premier ordre & à deux variables z & x, lorsque y manque dans la proposée. Si c'est x qui manque, on fera $dx = \frac{dy}{z}$. Substituant cette valeur de dx, & multipliant par z, la proposée deviendra $Azdz + Bz^2dy + C'zdy + Ddy = 0$, équation du premier

ordre à deux variables z & y. On cherchera l'intégrale de cette équation par les méthodes ci-dessus, & on déterminera z en x, ou en y, ou celle de x, ou de y en z. Substituant une de ces valeurs dans $z\,dx$, l'équation $dy = z\,dx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$ ne contiendra plus qu'une seule variable dans chaque membre, & il sera aisé d'avoir son intégrale au moins par les quadratures.

Si x manque dans l'équation, on peut supposer $dx = z\,dy$, d'où, à cause de dx constant, on tire $o = z\,ddy + dz\,dy$, ou $ddy = -\frac{dz\,dy}{z}$; donc en substituant ces valeurs de dx & de ddy, divisant par dy & multipliant par z, la proposée deviendra $-A\,dz + B\,z\,dy + C'z^2\,dy + D\,z^3\,dy = o$, équation du premier ordre & à deux variables y & z, qui étant intégrée fera connoître la valeur de y en z, ou celle de z en y, & substituant une de ces valeurs dans l'équation $dx = z\,dy$, on aura l'intégrale $x = S.\,z\,dy + C$, par où l'on déterminera la valeur de x en y. Les mêmes substitutions auront lieu & l'intégration se fera de même, quoique tous les termes de la proposée soient affectés des puissances quelconques de dx & de dy, ou de leurs produits : on voit aisément que toutes les différentielles doivent être homogenes dans tous les termes. On peut quelquefois employer la même méthode, quoique la différentielle constante ne soit ni dx, ni dy; mais une fonction comme $y\,dx$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, &c.

EXEMPLE I. Soit l'équation $pyy^3\, dy\, dx^3 = dx\, dy\, du^2 + y\, du^2\, ddx - y\, dx\, du\, ddu$, dans laquelle $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, p étant une fonction de y & de constantes. Si on prend dx pour constant, à cause de $ddx = 0$, la proposée, après avoir divisé par dx, deviendra $py^3\, dy\, dx^2 = dy\, du^2 - y\, du\, ddu$, dans laquelle x & u manquent. On fera donc $du = z\, dx$, & $ddu = dz\, dx$; donc, par substitution, $py^3\, dy\, dx^2 = z^2\, dy\, dx^2 - yz\, dz\, dx^2$. Si on multiplie cette équation par le facteur $M = \frac{1}{y^3\, dx^2}$, on aura $p\, dy = z^2 y^{-3}\, dy - y^{-2} z\, dz$. L'intégrale de cette équation sera $S.\, p\, dy = -\frac{z^2 y^{-2}}{2} + C = C - \frac{du^2}{2y^2\, dx^2}$, en substituant la valeur $\frac{du}{dx}$ de z.

Si on prend du pour constant, on a $ddu = 0$; si de plus on fait $dx = z\, du$, & $ddx = dz\, du$, la proposée deviendra, en effaçant le dernier terme, $py^3\, dy\, z^3\, du^3 = z\, dy\, du^3 + y\, dz\, du^3$, ou $p\, dy = \frac{z\, dy + y\, dz}{y^3 z^3}$; & en intégrant, $S.\, p\, dy = C - \frac{1}{2y^2 z^2} = C - \frac{du^2}{2y^2\, dx^2}$, comme auparavant.

EXEMPLE II. Soit encore l'équation $py^2\, dy\, dx^2 + du\, ddu = 0$, dans laquelle p est une fonction de y, sans aucune autre variable, $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & la différentielle $y\, dx$ constante. Les variables finies u, & x manquent dans l'équation, & parce que $y\, dx$ est constant, je suppose $du = zy\, dx$. Donc $ddu = y\, dx\, dz$; & par substitution, $py^2\, dy\, dx^2 + y^2 z\, dz\, dx^2 = 0$, $p\, dy = -z\, dz$, & en intégrant $S.\, p\, dy = -\frac{zz}{2} + C =$

C —

$C - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{2y^2 dx^2}\right)$, parce que $z = \frac{du}{ydx}$. Donc $2y^2 dx^2 . S. p dy = 2 C y^2 dx^2 - dx^2 - dy^2$, $dy^2 = (2 C y^2 - 1 - 2 y^2 . S. p dy) dx^2$, & $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2 C y^2 - 1 - 2 y^2 . S. p dy)}}$, équation dont chaque membre est une différentielle du premier ordre, & à une seule variable.

177. PROBLÊME. *Intégrer l'équation différentielle du troisieme ordre* $a d^3 y + b dy ddy + c dx ddy + f dy^3 + g dx dy^2 + h dx^2 dy + k dx^3 = 0$, *dans laquelle les variables finies* x *& y manquent à la fois, & dx est constant.* On fera $dy = z dx$; donc $ddy = dz dx$, & $d^3 y = ddz dx$; donc par substitution, & divisant par dx, la proposée deviendra $a ddz + b z dz dx + c dx dz + f ddz + g z^2 dx^2 + h z dx^2 + k dx^2 = 0$, équation du second ordre à deux variables z & x, dans laquelle la variable finie x manque. On trouvera donc, par la méthode du problême précédent, l'intégrale de cette équation, qui fera connoître la valeur de z en x. Substituant cette valeur dans $z dx$, l'équation $dy = z dx$, aura les variables séparées, & en intégrant on aura $y = S. z dx + C$, équation qui fera connoître la valeur de y en x.

On intégrera de la même maniere & par les mêmes substitutions lorsque les puissances de dx, dy, ddy, ou leurs produits se trouveront dans les termes de la proposée. Soit l'équation $dy ddy d^3 y + 2 dx dy ddy^2 - dx^2 dy^4 - 3 dx^6 = 0$,

dans laquelle dx est constant, & qui ne contient aucune des variables finies x, y. On supposera donc $dy = zdx$, ce qui donne $ddy = dzdx$, $d^3y = ddzdx$. C'est pourquoi par substitution & en divisant par dx^3, on aura $zdzddz + 2zdz^2dx - z^4dx^3 - 3dx^3 = 0$, équation qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (176), en faisant $dz = udx$, $ddz = dudx$; car en substituant & divisant par dx^2, l'on trouve $zudu + 2zu^2dx - z^4dx - 3dx = 0$, ou en mettant $\frac{dz}{u}$ au lieu de dx, & ôtant les fractions, $zu^2du + 2uuzdz - z^4dz - 3dz = 0$, équation du premier ordre à deux variables z & u, dont l'intégrale donnera la valeur de u en z. Cette valeur substituée dans $dx = \frac{dz}{u}$ donnera $x = S.\frac{dz}{u} + C$. après l'intégration, par le moyen de cette équation, on aura z en x, & substituant cette valeur dans l'équation $dy = zdx$, & intégrant, on aura y en x.

178. PROBLÊME. *Intégrer l'équation du troisieme ordre* $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 = 0$, *dans laquelle* dx *est constant & les coefficiens* A, B, C *des fonctions de* x *& de constantes, ou* 0. La supposition de $dy = zdx$ change la proposée en celle-ci $Addz + Bdzdx + Cdx^2 = 0$, équation du second ordre à deux variables x & z, dans laquelle la variable finie z manque. On cherchera donc par la méthode ci-dessus (176), la valeur

de z en x, qu'on substituera dans l'équation dy zdx, équation qui, en intégrant, donnera la valeur de y en x. L'intégration se fera de la même maniere lorsque les puissances, ou bien des fonction de dx, & de ddy se trouveront dans quelque terme que ce soit de la proposée, pourvu que dy ne s'y trouve pas.

179. **PROBLÊME.** *Intégrer l'équation du quatrieme ordre* $ad^4y + bdxd^3y + cdx^2ddy + fdx^4 = 0$, *dans laquelle les variables finies* x *&* y *manquent, ou dans laquelle les coefficiens* a, b, c, f *sont des constantes, ou zéro,* dx *étant constant.* Si l'on fait $dy = zdx$, & qu'on substitue les valeurs de d^4y, d^3y, ddy que donne cette supposition, la proposée, en divisant par dx, deviendra $ad^3z + bddzdx + cdzdx^2 + fdx^3 = 0$, équation qui s'intégre par la méthode du problême ci-dessus (177). Supposant qu'on ait trouvé la valeur de z en x; en intégrant l'équation $dy = zdx$, on aura la valeur de y en x.

Cette méthode peut s'appliquer aux équations différentielles à deux variables du cinquieme ordre, dans lesquelles dx étant constant, les variables x & y, avec les différences dy, ddy & leurs fonctions manquent. On peut de-là passer aux différentielles des ordres supérieurs & trouver pour chaque ordre les conditions nécessaires pour qu'une équation soit intégrable par cette méthode.

180. On peut aussi ramener plusieurs équations aux méthodes précédentes, & cela en prenant pour

conſtante une différentielle telle qu'elle faſſe diſparoître tous les termes qui empêcheroient l'équation d'être compriſe dans la forme des équations qu'on vient de traiter dans les problêmes précédens.

Soit l'équation $y\,dx\,ddx + 2x\,dy\,ddy = dx^3 - dx\,dy^2$. Si on prend dx pour conſtant, on aura $2\,x\,dy\,ddy = dx^3 - dx\,dy^2$, équation dans laquelle y manque, & qui eſt intégrable par notre méthode. Si on ſuppoſe dy conſtant, on trouvera une équation ſans x qui ſera encore intégrable.

On peut auſſi, par des ſubſtitutions, ramener pluſieurs équations à notre méthode.

Soit l'équation $x^n\,ddx = y\,ddy + dy^2 + y^2\,dy^2$, en ſuppoſant $y\,dy = dz$, ou $\frac{y^2}{2} = z$, on aura $y\,ddy + dy^2 = ddz$, & l'équation propoſée deviendra $x^n\,ddx = ddz + dz^2$, équation dans laquelle la variable finie z ne ſe trouve pas, & qui eſt intégrable par la méthode du problême ci-deſſus (176).

181. LEMME. *e etant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$, ſi on fait $x = e^{hu}$, h étant une conſtante & u variable, on aura $dx = he^{hu}\,du$, $ddx = he^{hu}(ddu + h\,du^2)$, $d^3x = he^{hu}(d^3u + 3\,h\,du\,ddu + hh\,du^3)$, &c.*

Puiſque $x = e^{hu}$, on aura $L.\,x = L.\,e^{hu} = hu\,.\,L.\,e = hu$; donc en différenciant, $d.\,L.\,x$ ou $\frac{dx}{x} = h\,du$; $dx = hx\,du = he^{hu}\,du$; & en différenciant encore, $ddx = hx\,ddu + h\,dx\,du$

$= he^{hu} ddu + hhe^{hu} du^2 = he^{hu} (ddu + hdu^2)$, & ainſi de ſuite ; donc &c.

182. COROLLAIRE I. Si on ſuppoſe dx conſtant ou $ddx = 0$, on aura $ddu = - hdu^2$.

183. COROLLAIRE II. Si on ſuppoſe $y = e^{ku} t$, k étant conſtant & t variable, il viendra $dy = tde^{ku} + e^{ku} dt = kte^{ku} du + e^{ku} dt = e^{ku} (ktdu + dt)$, & en prenant les ſecondes différences on trouvera $ddy = e^{ku} \times (ktddu + kktdu^2 + 2k\, dt\, du + ddt)$.

184. COROLLAIRE III. Si dans une équation à deux variables x & y, on ſuppoſe $x = e^{hu}$ & $y = e^{ku} t$, & qu'on ſubſtitue les valeurs qu'on tire de ces ſuppoſitions à la place de x, y, dx, ddx, dy, ddy, &c. L'équation ſera transformée en une autre telle que la variable finie u ne ſe trouvera que dans les expoſans de e. Maintenant ſi la propoſée eſt telle qu'on puiſſe faire diſparoître les quantités exponentielles dans l'équation transformée, elle deviendra une équation à deux variables u & t, dans laquelle la variable finie u manquera, & qui ne contiendra d'autres différentielles que du, dt, & les différences ddu, ddt, &c. On peut intégrer, par cette méthode, 1°. Toutes les équations à deux termes compriſes dans la formule $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$. 2°. Toutes les équations dont tous les termes ſont homogenes par rapport aux variables x, y &

leurs différences dx, dy, ddx, ddy, &c.
8°. Toutes les équations dans lesquelles la somme des exposans d'une même variable x & de ses différentielles est la même dans chaque terme.

185. PROBLÊME. *Intégrer l'équation* $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, *dans laquelle* dx *est constant.*

En supposant $x = e^{hu}$, $y = e^{ku}t$, & faisant attention que $ddu = -hdu^2$; par les substitutions, & les opérations ordinaires, la proposée deviendra $ah^p e^{mhu+phu} du^p = e^{nku+pku-ku} t^n (ktdu + dt)^{p-2} (ddt + 2kdtdu + (kk-kh).tdu^2)$. Pour faire disparoître les quantités exponentielles, je suppose les exposans de e (dans les deux membres de l'équation) égaux ; donc en divisant chaque membre par l'exponentielle qu'il renferme, on aura une équation sans exponentielles. Il faut donc supposer $mhu + phu = nku + pku - ku$, ou $\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p}$, & l'on peut prendre pour l'une des constantes h ou k, tel nombre qu'on voudra, & déterminer l'autre par l'équation qu'on vient de trouver. Si l'on fait $h = n+p-1$, somme des exposans de y & de ses différences dans le terme $y^n dy^{p-2} ddy$; (car ddy est censé avoir 1 pour exposant), on aura $k = m+p$, somme des exposans de x & de dx dans le terme $ax^m dx^p$; si on prend $k = 1$, on aura $h = \frac{n+p-1}{m+p}$.
Supposant maintenant qu'on ait divisé l'équation

transformée par la quantité exponentielle qu'on ſuppoſe être la même dans les deux membres, on aura $ah^p du^b = t^n (ktdu + dt)^{p-2}. \left(ddt + 2kdtdu + (kk - kh).tdu^2\right) \ldots$ (A), équation dans laquelle la variable finie u manque.

En ſuppoſant $du = zdt$, on aura $ddu = dzdt + zddt$, & par la ſuppoſition de dx conſtant & de $du = zdt$, on a $ddu = -hdu^2 = -hzzdt^2 = dzdt + zddt$; donc $ddt = -hzdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Subſtituant dans l'équation A les valeurs de du & de ddt, multipliant par z & diviſant par dt^{p-1}, on aura $ah^p z^{p+1} dt = t^n (kzt + 1)^{p-2} \left((2k-h).zzdt + (kk - kh) z^3 dt - dz\right) \ldots$ (B), équation du premier ordre à deux variables z & t, dont on cherchera l'intégrale par les regles ci-deſſus, après avoir ſubſtitué les valeurs de k & de h qu'on aura déterminées. Cette intégrale étant ſuppoſée connue, on aura la valeur de z en t, & ſubſtituant cette valeur dans zdt, on cherchera S. zdt; mais $du = zdt$; donc $u =$ S. zdt, & $x = e^{bu} = e^{b \text{S}.zdt}$.

EXEMPLE I. On propoſe de réduire au premier ordre l'équation $xdxdy = yddy$, dans laquelle dx eſt conſtant. Pour la comparer à la formule générale, je la diviſe par dy & j'ai $xdx = y dy^{-1} ddy$, comparant maintenant cette équation ainſi réduite à la formule $ax^m dx = y^n dy^{p-2} ddy$, j'ai $m = 1$, $a = 1$, $n = 1 = p$,

$\frac{h}{k}=\frac{n+p-1}{m+p}=-\frac{1}{2}$. Donc si l'on prend $k=1$, on aura $h=-\frac{1}{2}$, & substituant ces valeurs dans l'équation B, on aura $-\frac{1}{2}z^2dt=t(zt+1)^{-1}\left(\frac{3}{2}zzdt+\frac{1}{2}z^3dt-dz\right)$; ou en multipliant par $2.(zt+1)$, $z^3tdt+z^2dt=3z^2tdt+z^3tdt-2tdz$.

EXEMPLE II. Soit l'équation $\frac{adx}{x}=\frac{ddy}{ydy}$ dans laquelle dx est constant, qu'on veut réduire au premier ordre, je lui donne cette forme $ax^{-1}dx=y^{-1}dy^{-1}ddy$. En comparant avec la formule générale, on trouve $m=-1$, $p=1$, $n=-1$; donc $\frac{h}{k}=\frac{n+p-1}{m+p}=-\frac{1}{0}$, nombre infini; d'où l'on conclut que la méthode ne peut servir dans cette exemple, mais alors la réduction au premier ordre est facile. En effet, on a $aydydx=xddy$; or dx étant constant, l'intégrale du premier membre est $\frac{ay^2dx}{2}$, & celle du second est $xdy-ydx$. car en différenciant cette dernière quantité dans la supposition de dx constant, il vient $xddy+dxdy-dydx=xddy$. On aura donc $\frac{ayydx}{2}=xdy-ydx+Cdx$, C étant une constante.

Il est aisé de voir que l'équation $y^2ddy=xdxdy$, qui a embarrassé autrefois les plus grands Géometres, se réduit facilement par la méthode du problême. Passons au second cas.

186. PROBLÊME. *Intégrer les équations différentielles qui se rapportent à la formule générale* $ax^my^{-m-1}dx^pdy^{2-p}+bx^ny^{-n-1}dx^qdy^{2-q}+$&c.

$= ddy$, *dans laquelle* dx *est constant*, & *la somme des dimensions des variables* x & y & *de leurs différences* dx, dy, ddy *est la même dans chaque terme.* En faisant $x = e^u$, $y = e^u t$, éliminant, au moyen de ces suppositions, x, y, dy, dx, & ddy; faisant de plus attention que dx étant constant, on a $ddu = -h du^2$, la proposée devient, après les opérations ordinaires $e^u (ddt + 2 du dt) = a e^u t^{-m-1} du^p (t du + dt)^{2-p} + b e^u t^{-n-1} du^q (t du + dt)^{2-q} +$ &c. ou en divisant par e^u, $ddt + 2 du dt = at^{-m-1} du^p (tdu + dt)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q (tdu + dt)^{2-q} +$ &c. équation du second ordre & à deux variables u & t, dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas.

On fera donc $du = z dt$, ou $u = S. z dt$; ce qui donne $x = e^u = e^{S. z dt}$, & $y = e^{S. z dt} t$, $ddu = z ddt + dz dt$. Mais on a vu ci-dessus que dx étant constant, $ddu = -h du^2$, & ici $h = 1$; donc $ddu = -du^2 = -z^2 dt^2 = z ddt + dz dt$, & $ddt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$; donc en substituant & multipliant par z, on aura l'équation $zz dt - dz = at^{-m-1} z^{p+1} dt (zt + 1)^{2-p} + bt^{-n-1} z^{q+1} dt (zt + 1)^{2-q} +$ &c. équation du premier ordre à deux variables z & t, dont on cherchera l'intégrale par les regles ci-dessus.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^2 dx^3 + x^2 dy^3 - yx dx dy^2 - yx dy dx^2 + y x^2 dx ddy - x y^2 dx ddy = 0$, qui est dans le cas du problême, puisque dx est constant & que la somme des dimensions de x, y, dx, dy, ddy

est la même, savoir y, dans tous les termes. En supposant comme dans la solution du problême $x = e^u$, $y = e^u t$, éliminant par ces suppositions x, y, dx, dy, ddy, la proposée devient, après les réductions ordinaires, la transformée $dt^3 + 2tdudt^2 - t^2dtdu^2 + tdtdu^2 + tduddt - t^2duddt = 0$ ..... (A), dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas. On fera donc $du = zdt$, d'où l'on tirera, comme dans la solution du problême $ddu = -du^2 = -z^2dt^2 = dzdt + zddt$, & $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. En substituant ces valeurs dans l'équation A, l'on trouvera aisément l'équation du premier ordre $(t^2 - t)dz + 2tzdt + dt = 0$, qui est dans le cas du problême ci-dessus (128), & qui étant intégrée par la méthode de ce problême, donne $(t-1)^2 z + t - L.t = C$. Mais $du = zdt$, ou $z = \frac{du}{dt}$; donc en substituant cette valeur de z, multipliant par dt, transposant & divisant, il viendra $du = \frac{Cdt - tdt + dt.L.t}{(t-1)^2}$, & en intégrant, $u = \frac{t - C - tL.t}{t-1} + C'$. Mais $x = e^u$, ou $L.x = uL.e = u$, $y = e^u t$, $y = xt$, & $t = \frac{y}{x}$; ainsi notre intégrale devient $L.x = \frac{\frac{y}{x} - C - \frac{y}{x}L.\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} + C' = \frac{y - Cx - yL.y + yL.x - C'x + C'y}{y - x}$. Supposant $C + C' = m$, $1 + C' = n$, ôtant la fraction, transposant & réduisant, il viendra $ny - mx = yL.y - xL.x$. Venons au troisième cas.

187. PROBLÊME. *Intégrer les équations différentielles qui se rapportent à la formule générale*

$dx^m ddy = Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n}$ $+ R x^{m-p} dx^p dy^{m+2-p} +$ &c., *dans laquelle* dx *est constant & dont la somme des exposans de* x *& de* dx *est la même dans tous les termes*, P, Q, R, *&c. étant des fonctions de* y. Supposant $x = e^u$, on aura $dx = e^u du$: car $L.x = u L.e = u$, & $d.L.x = \frac{dx}{x} = du$, ou $dx = x du = e^u du$. Donc en substituant & divisant ensuite par e^{mu}, la proposée deviendra $du^m ddy = P dy^{m+2} + Q du^n dy^{m+2-n} + R du^p dy^{m+2-p} +$ &c. équation dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas. On fera donc $du = z dy$, & l'on aura $ddu = - du^2 = - z^2 dy^2 = z ddy + dz dy$; & $ddy = - z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$. Si l'on substitue ces valeurs dans la transformée & qu'on divise par dy^{m+1}, on aura $- z^{m+1} dy - z^{m-1} dz = P dy + Q z^n dy + R z^p dy$ &c. équation du premier ordre à deux variables z & y, dont on cherchera l'intégrale par les regles connues. Cette intégrale étant supposée trouvée, on aura la valeur de z en y qu'on substituera dans l'équation $du = z dy$; & parce que $L.x = u$, il viendra $L.x = S.z dy$, équation qui ne contiendra que les variables x & y.

EXEMPLE. Soit l'équation $2 a dx^2 dy + a x dx ddy = 2 x dx dy^2 + 2 x^2 y ddy$, dans laquelle dx est constant & la somme des exposans de x & de dx est 2 dans tous les termes; les coefficiens $2a$, & a des

termes où se trouve dy, sont des fonctions de y^0, & de constantes.

Supposant $x = e^u$ & $du = z\,dy$, on aura $dx = e^{S.z\,dy} z\,dy$, & $ddy = -z\,dy^2 - \frac{dz\,dy}{z}$. Substituant ces valeurs de x, dx, ddy dans la proposée, divisant par $dy^2\, e^{2S.z\,dy}$ & réduisant, on a $az^2\,dy - a\,dz = -\frac{2\,dz}{z}$, ou $a\,dy = \frac{a\,dz}{zz} - \frac{2\,dz}{z^3}$; & en intégrant, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C \ldots (A)$. On aura, par cette intégrale, la valeur de z en y, & la substituant dans la différentielle $z\,dy$, on aura l'intégrale $L.x = S\,z\,dy$. On peut parvenir à une équation différentielle du premier ordre par l'équation $L.\,x = S.z\,dy$: car en différenciant, on a $\frac{dx}{x} = z\,dy$, $z = \frac{dx}{x\,dy}$, & substituant cette valeur de z dans l'intégrale A, on trouvera, après les opérations ordinaires, $ay\,dx^2 = xx\,dy^2 - ax\,dx\,dy + C\,dx^2$.

188. PROBLÊME. *Intégrer l'équation* $dx^{m-1}\,ddx = A x^m\,dy^{m+1} + B x^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} + D x^{m-p}\,dx^p\,dy^{n-p+1} +$ *&c. dans laquelle* dy *est constant*, A, B, D, *&c. sont des fonctions de* y, *la somme des exposans de* x *& de ses différences* dx, ddx *est* m *dans tous les termes.* Supposant $x = e^u$, on aura $dx = e^u\,du$, $ddx = e^u(ddu + du^2)$, substituant ces valeurs dans la proposée & divisant par e^{mu}, il vient $du^{m+1} + du^{m-1}\,ddu = A\,dy^{m+1} + B\,du^n\,dy^{m-n+1} + D\,du^p\,dy^{m-p+1} +$ &c. équation dans laquelle u ne se trouve pas. On supposera donc $du = z\,dy$, ce qui donnera $ddu = dz\,dy$, à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la transformée & divisant par dy^m,

on a $z^{m+1}dy + z^{m-1}dz = Ady + Bz^n dy + Dz^p dy +$ &c. équation du premier ordre, dont on cherchera l'intégrale par les regles connues.

EXEMPLE. Soit proposée l'équation $2dxdy = addx - yddx$, ou $x^0 ddx = \frac{2dxdy}{a-y}$, dans laquelle dy est constant, la somme des exposans de x & de ses différences est 1 dans chaque terme, & le coefficient $\frac{2}{a-y}$ du terme où se trouve dy, est une fonction de y. On fera $x = e^u = e^{S.zdy}$ (en supposant $du = zdy$), $dx = e^{S.zdy} zdy$, $ddx = e^{S.zdy}(z^2 dy^2 + zddy + dzdy) = e^{S.zdy}(z^2 dy^2 + dzdy)$ à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la proposée, on trouve, après avoir divisé par dy, $2zdy = az^2dy + adz - zzydy - ydz$, équation du premier ordre. Si on met la proposée sous cette forme $2dxdy + yddx = addx$, on aura en intégrant dans la supposition de dy constant, $ydx + xdy = adx + Cdy$.

189. Les méthodes précédentes peuvent s'appliquer aux équations différentielles de tous les ordres, pourvu qu'elles puissent se rapporter aux cas dont on a parlé ci-dessus (184). Soit l'équation générale $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} \ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n} = 0$, dans laquelle les coefficiens A, B, C, &c. ayent les conditions requises, dx étant constant. Supposons $du = zdx$, $y = e^u = e^{S.zdx}$, on aura $dy = e^{S.zdx} zdx$, $\frac{dy}{dx} = e^{S.zdx} z$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^{S.zdx}\left(zz + \frac{dz}{dx}\right)$; $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{S.zdx}\left(z^3 + \frac{3zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$; &c. Substituant ces valeurs dans la proposée, elle sera divisible par $e^{S.zdx}$,

& elle deviendra de l'ordre $n-1$. Il est évident qu'en supposant égaux à o tous les coefficiens, excepté ceux des deux termes qu'on veut réduire à un ordre inférieur, on aura une équation à deux termes qu'on tâchera de réduire en imitant ce qu'on a fait ci-dessus pour les équations qui se rapportent au premier cas. Pour les autres cas, on déterminera les coefficiens, de manière que les termes ayent les conditions nécessaires.

190. La méthode dont nous avons parlé ci-dessus (147) peut facilement s'appliquer aux équations des ordres supérieurs, c'est-à-dire, que si l'on a un nombre N d'équations différentielles renfermant le nombre N + 1 de variables t, x, y, z, u, &c. chaque équation pouvant se réduire à la forme suivante (H) ..... $o = k + ax$

$$+ by + cz + \&c. + \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'dz}{dt} + \&c. + \frac{a''ddx}{dt^2} + \frac{b''ddy}{dt^2} + \frac{c''ddz}{dt^2} + \&c. + \frac{a'''d^3x}{dt^3} + \frac{b'''d^3y}{dt^3} + \&c. \ldots + \frac{Ad^nx}{dt^n} + \frac{Bd^ny}{dt^n} + \frac{Cd^nz}{dt^n} + \&c.$$

dans laquelle dt est constant, k une fonction de t, a, b, &c., a', b', &c., a'', b'', &c., a''', b''', &c., A, &c. sont des constantes quelconques ou o, on pourra intégrer ces équations par la méthode (du N°. 147), en supposant $dx = p\,dt$, $ddx = q\,dt^2$, $d^3x = r\,dt^3$, &c. jusqu'à $d^{n-1}x = s.dt^{n-1}$; & de même $dy = p'dt$, $ddy = q'dt^2$, &c. $dz = p''dt$, $ddz = q''dt^2$, &c. Or dt étant constant, de l'équation $dx = p\,dt$, on tire $ddx = dp\,dt = q\,dt^2$, $dddx = dq\,dt^2 = r\,dt^3$, &c. Donc en substituant & réduisant, l'équation H devient $o = k + ax + by + cz$

$$+ \&c. + \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'z}{dt} + \&c. + \frac{a''dp}{dt} + \frac{b''dp'}{dt} + \frac{c''dp''}{dt} + \&c. + \frac{a'''dq}{dt} + \frac{b'''dq'}{dt} + \&c. \ldots + \frac{Ads}{dt} + \frac{Bds'}{dt} + \frac{Cds''}{dt} + \&c.$$ équation du pré-

mier ordre. On aura de plus autant d'équations de la forme requise (147) qu'on aura introduit de nouvelles variables p, p', p'', &c. q, q', &c dans la formule (H). Car puisque $dx = p\,dt$, on aura $dx - p\,dt = 0$, & parce que $ddx = q\,dt^2 = dp\,dt$, on aura $dp = q\,dt$ & $dp - q\,dt = 0$, &c. On a de même $dy - p'\,dt = 0$, $dp' - q'\,dt = 0$, &c. Donc en multipliant toutes ces équations excepté une par des constantes indéterminées, on les intégrera par la méthode ci-dessus (N°. 147).

Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre $T\,ddx + aT\,dx\,dt + bxT\,dt^2 + T'\,dt^2 = 0$, dans laquelle dt est constant & T, T' sont des fonctions de t. Divisant cette équation par $T\,dt^2$ & supposant $\frac{T'}{T} = k$, on lui donne la forme (H)...$0 = k + bx + \frac{a\,dx}{dt} + \frac{ddx}{dt^2}$. On fera donc $dx = p\,dt$; ce qui donne $ddx = dp\,dt$, & substituant cette valeur de dx dans l'équation H, on aura, en ôtant les fractions, $dp + a\,dx + bx\,dt + k\,dt = 0$. On a de plus l'équation $dx - p\,dt = 0$: ces équations ont les conditions qu'exige la méthode (du N°. 147). Multipliant la seconde par la constante indéterminée A, ajoutant le produit à la première, on aura $dp + (A + a)\,dx + (bx - Ap)\,dt + k\,dt = 0$ .... (M). On supposera ensuite, suivant la méthode, $bx - Ap = mp + m(A + a)x$.... (P), m en étant une constante indéterminée; & comparant terme à terme les deux membres de cette équation, on aura $bx = m(A + a)x$, & $-Ap = mp$, d'où l'on tire $m = -A$, & $m = \frac{b}{A + a} = -A$; donc $A^2 + aA = -b$, & $A = \frac{-a \pm \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, ce qui donne deux valeurs de A que nous exprimerons par A & A', & aussi deux valeurs correspondantes de m que nous désignerons par m & m'. En substituant ces valeurs dans l'équation P, & supposant $p + (A + a)x = u$, $p + (A' + a)x = u'$, l'équation M sera changée en ces

deux autres $du + mudt + kdt = 0$, & $du' + m'u'dt + kdt = 0$, qu'on intégrera par le (N°. 128). On trouvera donc u & u' en t, & ensuite les deux équations $p + (A + a)x = u$, $p + (A' + a)x = u'$, donneront la valeur de x en t.

Soit maintenant l'équation du troisième ordre $Td^3x + aTddxdt + bTdxdt^2 + cxTdt^3 + T'dt^3 = 0$, dans laquelle dt est constant. En divisant par Tdt^3 & faisant $\frac{T'}{T} = k$, on trouvera aisément l'équation $0 = k + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{addx}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}$, qui a la forme requise. On supposera donc $dx = pdt$, $ddx = qdt^2 = dpdt$, $d^3x = dqdt^2$, d'où l'on tirera $0 = k + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{adp}{dt} + \frac{dq}{dt}$, ou $dq + adp + bdx + cxdt + kdt = 0$. On a de plus $dx - pdt = 0$, & $dp - qdt = 0$; or ces trois équations sont susceptibles de la méthode du (N°. 147). En suivant cette méthode & multipliant la seconde par A & la troisième par B, ajoutant ensuite les trois équations, &c. désignant par m, m', m' les trois valeurs de m qu'on aura dans ce cas, on parviendra aux trois équations $du + mudt + kdt = 0$, $du' + m'u'dt + kdt = 0$, $du'' + m''u''dt + kdt = 0$, qu'on intégrera par la méthode du (N°. 128). On trouvera les valeurs de u, de u' & de u'' en t, & l'on aura de plus les trois équations $q + (a + B)p + (b + A)x = u$, $q + (a + B')p + (b + A')x = u'$, $q + (a + B'')p + (b + A'')x = u''$, dans lesquelles A, A', A'', désignent trois valeurs de A, & B, B', B' les trois valeurs correspondantes de B. Ces équations donneront les valeurs de x en t.

Soit proposé maintenant d'intégrer les équations suivantes du second & du troisième degré :

$$0 = k + ax + by + \frac{cdx}{dt} + \frac{fdy}{dt} + \frac{ddx}{dt^2},$$

$$0 = k' + gx + \frac{hdy}{dt} + \frac{d^3y}{dt^3}.$$

dans

dans lesquelles dt est constant, & k, k' des fonctions de t. On fera $dx = pdt$, $ddx = dpdt$, $dy = qdt$, $ddy = rdt^2 = dqdt$, $d.^3 y = drdt^2$; donc $dqdt = rdt^2$. Substituant $dpdt$ au lieu de ddx, & $drdt^2$ au lieu de $d^3 y$, dans les équations proposées, on trouvera facilement les transformées $dp + cdx + fdy + (ax + by)dt + kdt = 0$, $dr + hdy + gxdt + k'dt = 0$. On aura de plus les trois équations suivantes $dx - pdt = 0$; $dy - qdt = 0$; $dq - rdt = 0$. Ces cinq équations ayant les conditions que demande la méthode ci-dessus (147), on multipliera la seconde par A, la troisième par B, la quatrième par C & la cinquième par D, A, B, &c. sont des constantes indéterminées. Ajoutant ensuite toutes ces équations, on aura la somme (H) .... $dp + Ddq + Adr + (c + B)dx + (f + hA + C)dy + (ax + gAx + by - Bp - Cq - Dr)dt + (k + Ak')dt = 0$. Ensuite m étant un facteur constant & indéterminé, on supposera, selon la méthode, $(a + gA)x + by - Bp - Cq - Dr = m[p + Dq + Ar + (c + B)x + (f + hA + C).y] = mu$. En développant le second membre de cette équation & égalant les termes homologues, on aura les équations suivantes : $m = -B$; $mD = -C$; $mA = -D$; $m.(c + B) = a + gA$; $m.(f + hA + C) = b$, & l'équation H deviendra $du + mudt + (k + Ak')dt = 0$; qu'on pourra intégrer par la méthode ci-dessus (128), après avoir déterminé les valeurs de A & de m par les équations qu'on vient de trouver, ce qui est facile : car puisque $B = -m$, $D = -mA$, & $C = -mD = mmA$, si on substitue ces valeurs de B, de C & de D dans les deux équations $m.(c + B) = a + gA$; $m.(f + hA + C) = b$, elles deviendront $m(c - m) = a + gA$, & $m(f + hA + mmA) = b$, d'où l'on tire $A = \frac{Cm - m^2 - a}{g} = \frac{b - fm}{hm + mmm}$, & de-là une équation du cinquième degré qui donnera cinq valeurs de m, d'où l'on déduira cinq valeurs correspondantes pour chacun des facteurs A, B, C, D. On fera le reste comme dans les exemples précédens, au moyen des deux équations $du + mudt + (k + Ak')dt = 0$, & $p + Dq + Ar + (c + B)x + (f + hA + C)y = u$.

191. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale finie & complette de l'équation du second ordre* $0 = -y + \frac{x\,dy}{dx} + \frac{a\,x\,ddy}{dx^2}$. Si l'on fait $y = cx + xz$ (c étant une constante arbitraire) & qu'on substitue dans la proposée les valeurs de y, dy & ddy que donne cette supposition, il viendra, après les opérations ordinaires, $0 = x\,dz\,dx + 2\,a\,dz\,dx + a\,x\,ddz$, & en divisant par $a\,x\,dz$, $0 = \frac{dx}{a} + \frac{2\,dx}{x} + \frac{ddz}{dz}$, ou $\frac{2\,dx}{x} + \frac{ddz}{dz} = -\frac{dx}{a}$. En intégrant & ajoutant la constante L. B dx, on a 2. L. x + L. dz = L. B $dx - \frac{x}{a}$, ou

$$\text{L.}x^2dz = \text{L.B}dx - \frac{x}{a}.\text{L.}e = \text{L. B}\,e^{-\frac{x}{a}}\,dx\,;$$

$$\text{donc } x^2dz = \text{B}e^{-\frac{x}{a}}\,dx\,;\ dz = \frac{\text{B}\,e^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx} \ldots\text{(A)},$$

& en intégrant encore, $z = \text{B. S.}\frac{e^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx}$; donc l'intégrale complette sera $y = cx +$ $\text{B}\,x\,\text{S.}\frac{e^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx}$, qui renferme deux constantes arbitraires comme il convient. En général l'intégrale finie & complette d'une équation d'un ordre n doit contenir un nombre n de constantes arbitraires : car en supposant dx constant, à chaque intégration que l'on fera, on doit ajouter une constante ; donc puisqu'on doit faire n intégra-

tions, on doit avoir n constantes. On n'a pas ajouté de constante en intégrant l'équation A, parce qu'elle étoit inutile : car si on fait $z = D + B. S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, on aura pour l'intégrale complette $y = cx + Dx + Bx. S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, qui se réduira à la forme ci-dessus en faisant $c + D = A'$, & changeant ensuite A' en c.

Si l'on avoit l'équation $aady + yydx = (aa + xx)dx$, en supposant $y = x + z$ & éliminant y & dy, on trouveroit l'équation $aadz + 2zxdx + zzdx = 0$, qui étant intégrée par la méthode du (n°. 128), donnera $z = \frac{Caa. e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + C. S. e^{-\frac{xx}{aa}} dx}$. Mais, par supposition, $y = x + z$; donc l'intégrale complette sera $y = x + \frac{Caa. e^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + C. S. e^{-\frac{xx}{aa}} dx}$. Si on fait $C = 0$, on aura $y = x$, intégrale particuliere de la proposée.

192. Si une valeur particuliere de $y = p$ rend la différentielle $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$ &c.

égale à o, on aura auſſi $y = ap$, a étant une conſtante arbitraire, & en ſubſtituant ap au lieu de y, la différentielle ſera auſſi égale à o; car on aura $Aap + \frac{Badp}{dx} + \frac{Caddp}{dx^2} +$ &c. $= 0$. Puiſque cette différentielle eſt le produit de a par $Ap + \frac{Bdp}{dx} + \frac{Cddp}{dx^2} +$ &c., & qu'on ſuppoſe que cette dernière quantité eſt $= 0$. De même ſi la ſuppoſition de $y = q$, rend la différentielle propoſée $= 0$, en ſubſtituant bq au lieu de y, la différentielle ſera encore $= 0$. Il en ſera de même en ſubſtituant $ap + bq$ au lieu de y: car ſi on a les deux quantités $Aap + \frac{Badp}{dx} + \frac{Caddp}{dx^2} +$ &c, & $Abq + \frac{Bbdq}{dx} + \frac{Cbddq}{dx^2} +$ &c. dont chacune eſt $= 0$, leur ſomme ſera auſſi $= 0$; or en ſubſtituant $ap + bq$ au lieu de y, on a la ſomme des quantités précédentes; donc &c. De même ſi p, q, r, s, &c. ſont des valeurs particulieres de y, qui rendent notre différentielle $= 0$, $y = ap + bq + cr + fs +$ &c. ſera une intégrale de notre différentielle, & ſi notre différentielle eſt du quatrieme ordre ſeulement, l'intégrale $y = ap + bq + cr + fs$, qui contiendra quatre conſtantes indéterminées a, b, c, f, ſera l'intégrale complette & finie de l'équation $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4}$.

193. Soit l'équation générale $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$ ..... (H) dans laquelle la différentielle dx & tous les coefficiens A, B, &c. sont des constantes. Si l'on suppose $y = e^{hx}$, h étant une constante & $L.e = 1$, on aura $L.y = hx.L.e = hx$, $\frac{dy}{y} = hdx$, $dy = hydx = hdxe^{hx}$, $\frac{dy}{dx} = he^{hx}$; & en supposant dx constant on trouvera $\frac{ddy}{dx} = h^2.e^{hx}dx$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = h^2 e^{hx}$. On en aura aussi $\frac{d^3y}{dx^3} = h^3 e^{hx}$, & en général $\frac{dy^n}{dx^n} = h^n e^{hx}$. Substituant ces valeurs dans l'équation H & divisant le résultat par e^{hx}, on aura la transformée (K)...... $o = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 \cdots\cdots\cdots + Nh^n$, dont l'inconnue est h, & qui est du dégré n. Si on suppose que f est une des racines de cette équation de maniere que l'on ait $h = f$, ou que $h - f = o$ soit un diviseur de l'équation K, on aura $y = e^{fx}$, équation intégrale particuliere de la proposée H; donc, selon ce qu'on vient de dire (192), $y = ae^{fx}$ sera une autre équation intégrale particuliere de la proposée qui renfermera une constante arbitraire a. Si toutes les racines de l'équation K sont inégales & qu'on les représente

par f, f', f'', f''', &c. respectivement, l'intégrale complette & finie de la proposée sera $y = a e^{fx} + b e^{f'x} + c . e^{f''x} + \&c.$, a, b, c, &c. étant des constantes arbitraires.

Voyons maintenant comment il faut s'y prendre lorsque l'équation K a des racines égales, c'est-à-dire, quelque facteur de cette forme $(h - f)^m = 0$. Je remarque d'abord que la relation qu'il y a entre l'équation H & l'équation K est telle, que si dans la première on écrit h^0 pour y, h pour $\frac{dy}{dx}$, h^2 pour $\frac{ddy}{dx^2}$, & en général h^m pour $\frac{d^m y}{dx^m}$, elle deviendra l'équation K, & que si dans celle-ci on écrit y pour h^0, $\frac{dy}{dx}$ pour h, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour h^2, &c. on rétablira l'équation H; d'où l'on conclut que si $h - f = 0$, ou $h - fh^0 = 0$, est un diviseur de l'équation K, on en pourra tirer l'équation $\frac{dy}{dx} - fy = 0$, ou $\frac{dy}{y} = f dx$, dont l'intégrale $L. y = fx. L. e$, ou $y = e^{fx}$ sera une intégrale particulière de la proposée. Donc $y = a. e^{fx}$ sera aussi une intégrale de la proposée, & si l'on a le diviseur double $(h - f)^2 = 0$, ou $ffh^0 - 2fh + hh = 0$, on en tirera, par les substitutions prescrites, l'équation différentielle (R)..... $ffy - \frac{2fdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$

on cherchera ensuite l'intégrale finie & complette de cette équation, en faisant $y = e^{fx} u$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = f e^{fx} u + \frac{e^{fx} du}{dx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = f^2 e^{fx} u + \frac{2 e^{fx} du}{dx} + \frac{e^{fx} ddu}{dx^2}$. Substituant ces valeurs dans l'équation différentielle R, elle devient en réduisant, $\frac{e^{fx} ddu}{dx^2} = 0$, donc $ddu = 0$; donc en intégrant, $du = b dx$, b étant une constante arbitraire, & en intégrant encore, $u = bx + a$, a étant une autre constante arbitraire. Mais on a supposé $y = e^{fx} u$, donc on aura $y = e^{fx}(a + bx)$, valeur de y qui contient deux constantes arbitraires, & qui répond à deux racines égales de l'équation K. De même si l'équation K a un diviseur triple $(f - h)^3$, en le développant & faisant les substitutions prescrites, on en déduira l'équation $f^3 y - \frac{3ffdy}{dx} + \frac{3fddy}{dx^2} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, qui sera contenue dans la proposée (H), & en supposant $y = e^{fx} u$, on trouvera par substitution, $d^3 u = 0$. En intégrant cette équation, il vient $ddu = 2c dx^2$, $2c$ étant une constante arbitraire; en intégrant de nouveau, on a $du = 2cx dx + b dx$, b étant une constante arbitraire; & en intégrant pour la troisième fois, on trouve $u = cx^2 + bx + a$, a étant encore une constante arbitraire. On aura donc $y = e^{fx}(a + bx + cxx)$, valeur de y qui répond à trois racines égales de l'équation K. En général si le diviseur est $(f - h)^m$, on aura $y = e^{fx}(a + bx + cx^2 + Dx^3 +$

$g x^4 \ldots \ldots + k x^{m-1}$), a, b, c, D, g, &c. étant des conſtantes arbitraires; de ſorte que cette valeur renfermera le nombre m de conſtantes arbitraires.

Suppoſons maintenant que l'équation algébrique K renferme des racines imaginaires, nous ſavons que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair : de plus nous avons vu ci-deſſus que les racines imaginaires peuvent être repréſentées par la formule $M + N\sqrt{-1}$, & il eſt évident que ſi l'une des racines imaginaires d'une équation algébrique eſt repréſentée par $a + b\sqrt{-1}$, ſa correſpondante ſera $a - b\sqrt{-1}$, autrement leur produit ne ſauroit être réel. Si on ſuppoſe que V repréſente un arc de cercle dont le rayon ſoit $= 1$, & qu'une des racines imaginaires de l'équation K ſoit $h = m.$ coſ. V $+ m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$, ſa correſpodante ſera $= m.$ coſ. V $- m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$, donc on aura ($h - m.$ coſ. V $- m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$) ($h - m.$ coſ. V $+ m.$ ſin. V $\times \sqrt{-1}$) $= hh - 2m.$ coſ. V. $h + mm.$ coſ.^{2} V $+ mm.$ ſin.^{2} V $= 0$, ou (parce que ſin.^{2} V + coſ.^{2} V eſt égal au quarré 1 du rayon,) $mmh^0 - 2mh.$ coſ. V $+ hh = 0$, équation qui repréſente un diviſeur réel de la propoſée. Par les ſubſtitutions preſcrites, je réduis ce diviſeur à la forme (P)... $0 = mmy - 2m. \frac{dy}{dx}$ coſ. V $+ \frac{ddy}{dx^2}$. Je cherche maintenant l'intégrale correſpondante en ſuppoſant $y = e^{mx.\,\text{coſ. V}}\, u$, d'où l'on tire $dy = m.$ coſ. V. $e^{mx.\,\text{coſ. V}}\, u dx$ +

$e^{mx.\,\text{cof. V}}\,du$, & $ddy = mm.(\text{cof. V})^2 \times e^{mx.\,\text{cof. V}}\,udx^2 + 2m.\,\text{cof. V}\,e^{mx.\,\text{cof. V}}\,dudx + e^{mx.\,\text{cof. V}}\,ddu$, l'arc V eft cenfé conftant. Subftituant ces valeurs de y, dy, ddy dans l'équation P, réduifant & divifant par $e^{mx.\,\text{cof. V}}$, on aura $0 = mmu - mmu.\,(\text{cof. V})^2 + \frac{ddu}{dx^2}$, ou $mmu\left(1 - (\text{cof. V})^2\right) + \frac{ddu}{dx^2} = 0$, ou (parce que dans un cercle le quarré du finus eft égal au quarré du rayon moins le quarré du cofinus,) $mm.(\text{fin.V})^2 u + \frac{ddu}{dx^2} = 0$, ou $mm.\,(\text{fin. V})^2\,udx^2 + ddu = 0$. En multipliant cette équation par $2du$, on aura $2mm.\,(\text{fin. V})^2\,ududx^2 + 2duddu = 0$, dont l'intégrale (à caufe de dx conftant), en ajoutant la conftante du même ordre $a^2\,mm.(\text{fin. V})^2.\,dx^2$, fera $mm.\,(\text{fin. V})^2\,uudx^2 + du^2 = a^2mm.\,(\text{fin. V})^2\,dx^2$; d'où l'on tire $\frac{du^2}{aa - uu} = mm.\,(\text{fin. V})^2\,dx^2$; donc $\frac{du}{\sqrt{(aa-uu)}} = m.\,\text{fin. V}.\,dx$. Mais $\frac{du}{\sqrt{(aa-uu)}} = \frac{\frac{du}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{uu}{aa}\right)}} = ds$ élément d'un arc de cercle dont le finus eft $\frac{u}{a}$ & le rayon $= 1$; donc $ds = m.\,\text{fin. V}.\,dx$, & $s = mx.\,\text{fin. V} + B'$, B' étant

une constante arbitraire. Mais on peut prendre la quantité $m\,x.\,\text{sin.}\,V + B'$ pour un arc de cercle dont le sinus est $\frac{u}{a}$; donc on aura $\frac{u}{a} =$ $\text{sin.}(mx.\text{sin.}V + B')$, ou $u = a.\text{sin.}(mx.\text{sin.}V + B')$. Substituant cette valeur de u dans l'équation $y = e^{mx.\,\text{cos.}\,V}u$, on trouvera $y = a\,e^{mx.\,\text{cos.}\,V} \times$ $\text{sin.}(m\,x.\,\text{sin.}\,V + B')$, valeur de y correspondante aux deux racines imaginaires du diviseur $mm - 2\,m\,h.\,\text{cos.}\,V + hh = 0$, & qui contient deux constantes arbitraires a & B'.

Supposons maintenant que l'équation K ait des racines imaginaires égales entr'elles, c'est-à-dire, ait pour diviseur le quarré, le cube, ou une puissance k du facteur $m\,m - 2\,m\,h.\,\text{cos.}\,V + h\,h$; on aura $mm - 2\,mh.\,\text{cos.}V + hh = (h - m.\,\text{cos.}\,V + m.\,\text{sin}\,V\sqrt{-1})\,(h - m.\,\text{cos.}\,V - m.\,\text{sin.}\,V\sqrt{-1})$. Mais selon ce que nous avons dit ci-dessus, à la valeur de $h = f$, ou au diviseur $h - f = 0$ de l'équation K répond $y = e^{fx}a$, au diviseur $(h - f)^m$ répond $y = e^{fx}(a + bx + cx^2\ \&c.)$; donc si on fait successivement f (qui est $= h$) $= m.\,\text{cos.}\,V - m.\,\text{sin.}\,V.\sqrt{-1}$, & $f = m.\,\text{cos.}\,V + m.\text{sin.}\,V.\sqrt{-1}$, le diviseur $h - m.\,\text{cos.}\,V - m.\,\text{sin.}\,V.\sqrt{-1}$, donnera la variable $y = a\,e^{mx.\text{cos.}\,V + mx.\,\text{sin.}V\sqrt{(-1)}}$, & le diviseur simple correspondant $h - m.\,\text{cos.}\,V + m.\,\text{sin.}\,V.\sqrt{-1}$, donnera $y = a'\,e^{mx.\,\text{cos.}V - mx.\,\text{sin.}\,V.\sqrt{-1}}$.

le produit $mm - 2hm.\text{cof.}V + hh$ de ces diviseurs donnant $y = ae^{mx.\text{cof.}V. + mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}} + a' e^{mx.\text{cof.}V - mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}}$, somme des deux valeurs de y correspondante à deux diviseurs imaginaires. Mais on a vu ci-dessus que le diviseur $mm - 2mh.\text{cof.}V + hh = 0$, donne $y = ae^{mx\,\text{cof.}V}.\text{Sin.}(mx.\text{fin.}V + B')$; donc $ae^{mx.\text{cof.}V}.\text{fin.}(mx.\text{fin.}V + B') = e^{mx.\text{cof.}V}\left(ae^{mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{fin.}V.\sqrt{-1}}\right)$; donc en divisant par $e^{mx.\text{cof.}V}$, on aura $a.\text{fin.}(mx\,\text{fin.}V + B') = ae^{mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}}$, & en multipliant de part & d'autre par x^k, on trouve $ax^k\,\text{fin.}(mx.\text{fin.}V + B') = ax^k e^{mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}} + a'x^k e^{-mx.\text{fin.}V\sqrt{-1}}$.

Supposons présentement que le quarré $(mm - 2mh.\text{cof.}V + hh)^2 = (h - m.\text{cof.}V - m.\text{fin.}V\sqrt{-1})^2 (h - m.\text{cof.}V + m.\text{fin.}V\sqrt{-1})^2$, soit un diviseur de l'équation K, on fera $f = m.\text{cof.}V. + m.\text{fin.}V.\sqrt{-1}$, & ensuite $f = m.\text{cof.}V - m.\text{fin.}V.\sqrt{-1}$. Donc parce que le facteur $(h - f)^2$ donne $y = e^{fx}(a + bx)$,

le facteur $(h - m.\text{cos}.\,V - m.\,\text{sin}\,V\sqrt{-1})^2$; donnera $y = e^{mx.\,\text{cos}.\,V + mx\,\text{sin}.\,V.\sqrt{(-1)}} \times (a+bx)$, le facteur $(h - m.\,\text{cos}.\,V + m.\text{sin}.\,V\sqrt{-1})^2$, donnant $y = e^{mx.\text{cos}.V - mx.\text{sin}.\,V\sqrt{-1}}(a'+b'x)$; donc la valeur de y correspondante au facteur $(mm - 2mh.\text{cos}.\,V + hh)^2$ sera $y = e^{mx.\text{cos}.V} \times \left(ae^{mx.\,\text{sin}.\,V.\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\,\text{sin}.\,V.\sqrt{-1}}\right) + e^{mx.\,\text{cos}.\,V}\left(bxe^{mx.\,\text{sin}.\,V.\sqrt{-1}} + b'xe^{-mx.\,\text{sin}.V\sqrt{-1}}\right)$. Mais, selon ce qu'on a dit ci-dessus, $ae^{mx.\text{sin}.V\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{sin}V.\sqrt{-1}} = a\,\text{sin}.\,(mx.\,\text{sin}.\,V + B')$*, a & B' étant des constantes arbitraires. Par la même raison on aura $bxe^{mx.\,\text{sin}.V\sqrt{-1}} + b'xe^{-mx.\,\text{sin}.V\sqrt{-1}} = bx\,\text{sin}.\,(mx.\,\text{sin}.\,V + B'')$, b & B'' étant des constantes arbitraires. Donc la valeur de y qui répond au diviseur $(mm - 2mh.\,\text{cos}.\,V + hh)^2$ sera $y = e^{mx.\,\text{cos}.\,V}\left(a\,\text{sin}.(mx.\,\text{sin}.\,V + B') + bx.\,\text{sin}.\,(mx.\text{sin}.\,V + B'')\right)$, qui renferme quatre

* Dans le second membre de cette équation on a représenté $a + a'$ par a, dans le second membre de l'équation suivante b représente la valeur de $b + b'$ qui se trouve dans le premier membre.

conſtantes arbitraires, a, b, B', B''. On trouvera de même que la valeur de y, qui répond au diviſeur cube $(mm - 2mh.\text{coſ.}\,V + hh)^3$, eſt $y = e^{mx.\text{coſ.}\,V}(a.\ \text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + B') + bx.\ \text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + B'') + cx\ \text{ſin.}\ (mx.\text{ſin.}\ V + B'''))$ qui renferme ſix conſtantes arbitraires ; & en général, comme au diviſeur $(h - f)^k$ répond $y = e^{fx}(a + bx + cx^2 \ldots + Nx^{k-1})$, au diviſeur $(mm - 2mh.\text{coſ.}\,V + hh)^k$ répondra $y = e^{mx.\text{coſ.}V}(a.\text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + B') + bx.\ \text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + B'') + cxx\ \text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + B''') + \&c. \ldots + N'x^{k-1}\ \text{ſin.}\ (mx.\ \text{ſin.}\ V + C'))$ qui renfermera un nombre $2k$ de conſtantes arbitraires, a, b, c, &c. B', B'', B''', &c. N' & C'.

194. PROBLEME. *Trouver l'intégrale complette & finie de l'équation* (H) .... $0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C.\frac{ddy}{dx^2} + \&c. \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$, *dans laquelle la différence* dx *eſt conſtante, & les coefficiens* A, B, *&c. ſont des conſtantes, ou* 0. On écrira dans la propoſée h^0, au lieu de y, h au lieu de $\frac{dy}{dx}$, h^2 au lieu de $\frac{ddy}{dx^2}$, & généralement h^k au

lieu de $\frac{d^k y}{dx^k}$, & on formera l'équation (K), ou $o = A h^0 + B h + C h^2 \ldots + N h^n$, du dégré n; on décomposera cette équation en facteurs réels $h - f = o$, $(h - f)^k = o$. On cherchera aussi les facteurs imaginaires, qui, pris deux à deux, donneront un facteur de la forme $hh - 2 mh. \text{cos. } V + mm = o$, & s'il y a des racines imaginaires égales, on aura quelque facteur de la forme $(hh - 2 m h. \text{cos. } V + mm)^k = o$. Chaque facteur simple qui n'a point d'autre facteur égal, donnera $v = a e^{fx}$; mais chaque facteur composé de facteurs simples égaux entr'eux, comme $(h - f)^k = o$, donnera $e^{fx}(a + b x + c x^2 + \&c.... + N' x^{k-1})$. Chaque facteur $hh - 2 mh. \text{cos. } V + mm = o$, de deux dimensions qui n'a point d'autre facteur égal, donnera $y = e^{mx. \text{cos. } V}(a. \text{sin.}(mx. \text{sin. } V + B'))$; chaque facteur, composé de plusieurs facteurs de deux dimensions égaux entr'eux, comme $(hh - 2 m h. \text{cos. } V + mm)^k = o$, donnera $y = e^{mx. \text{cos. } V}[a. \text{sin. }(mx. \text{sin. } V + B') + bx. \text{sin.}(mx. \text{sin. } V + B'') + cx^2 \text{sin.}(mx. \text{sin. } V + B''') + \&c..... + N'' x^{k-1} \text{sin.}(mx. \text{sin. } V + N''')]$. a, b, &c. B', B'', &c. N''' étant des constantes arbitraires, V étant l'arc d'un cercle

dont le rayon $= 1$, & mx ſin. V + B', mx. ſin. V + B'', &c. étant auſſi des arcs pris dans le même cercle dont le rayon $= 1$. On fera la ſomme de toutes ces valeurs particulières de y, & formant une équation dont un des membres ſoit cette ſomme, & dont l'autre membre ſoit y, cette équation ſera l'intégrale complette réelle & finie de l'équation propoſée (H), cela ſuit évidemment de ce qu'on vient de dire (193).

REMARQUE. Si l'on avoit deux facteurs $h - f = 0$, $h - f' = 0$, ſimples & inégaux, le premier donneroit $y = e^{fx} a$, le ſecond $y = e^{f'x} a'$, &c. ce que nous faiſons remarquer, afin qu'on ne s'imagine par que la conſtante a, qui répond à un diviſeur ſimple, ſoit la même que celle qui répond à un autre diviſeur ſimple qui n'eſt pas égal au premier, & l'on doit faire un raiſonnement ſemblable pour les diviſeurs multiples de la forme $(h - f)^k = 0$, & pour les diviſeurs de deux dimenſions, ſoit qu'ils en ayent d'autres qui leur ſoient égaux ou non.

EXEMPLE I. Trouver l'intégrale complette & finie de l'équation différentielle du troiſième ordre, $0 = y - \frac{3g^2 ddy}{dx^2} + \frac{2g^3 d^3y}{dx^3}$. Par les ſubſtitutions preſcrites, on aura $0 = h^0 - 3g^2h^2 + 2g^3h^3$, ou en diviſant par $2g^3$, & faiſant attention que $h^0 = 1$, $h^3 - \frac{3h^2}{2g} + \frac{1}{2g^3} = 0$. Cette équation ſe réſout en deux facteurs h

$+\frac{g}{2}=0$, & $\left(h-\frac{1}{g}\right)^2=0$. Le premier facteur étant comparé avec le facteur $h-f=0$, donne $f=-\frac{1}{2g}$, & $y=ae^{fx}=ae^{-\frac{x}{2g}}$. L'autre facteur étant comparé avec la formule $(h-f)^2=0$, donne $f=\frac{1}{a}$, & $y=e^{\frac{x}{g}}(a'+bx)$. Donc l'intégrale complette sera $y=ae^{-\frac{x}{2g}}+e^{\frac{x}{g}}(a'+bx)$.

REMARQUE. Si la constante a se trouvoit dans l'équation différentielle proposée, pour plus de clarté on n'emploieroit pas la lettre a comme constante arbitraire, dans l'intégrale.

EXEMPLE II. Intégrer l'équation différentielle du quatrième ordre $0=y-\frac{a^4d^4y}{dx^4}$. On formera, par substitution, l'équation $0=1-a^4h^4$, ou en changeant les signes & divisant, $0=h^4-\frac{1}{a^4}=\left(h-\frac{1}{a}\right)\times\left(h+\frac{1}{a}\right)\left(h^2+\frac{1}{aa}\right)$, le facteur $h-\frac{1}{a}=0$; donne $y=a'e^{\frac{x}{a}}$, le facteur $h+\frac{1}{a}=0$; donne $y=a''e^{-\frac{x}{a}}$, & les deux ensemble donnent $y=a'e^{\frac{x}{a}}+a''e^{-\frac{x}{a}}$. Le facteur $hh+\frac{1}{aa}=0$, qui renferme deux racines imaginaires $\frac{1}{a}\sqrt{-1}$ & $-\frac{1}{a}\sqrt{-1}$, étant comparé à la formule $hh-2mh\,\text{cos.}\,V+mm=0$, donne $m=\frac{1}{a}$, & cos. $V=0$: d'où l'on tire sin. $V=1$. Car sin. $V=\sqrt{\left(1-(\text{cos.}V)^2\right)}$; mais

mais la formule $hh - 2mh \text{ cof. V.} + mm = 0$, donne $y = e^{mx \text{ cof. V}} a''' \text{ fin. } (mx \text{ fin. V} + B')$, en regardant a''' comme une conftante indéterminée. De plus à caufe de cof. V $= 0$, l'on a $mx \text{ cof. V} = 0$, & $e^{mx \text{ cof. V}} = e^0 = 1$; donc $y = a''' \text{ fin. } (\frac{x}{a} + B')$;

donc l'intégrale complette cherchée fera $y = a' e^{\frac{x}{a}} + b e^{-\frac{x}{a}} + a''' \text{ fin. } (\frac{x}{a} + B')$.

EXEMPLE III. Intégrer l'équation $0 = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$. L'équation qui en réfulte par les fubftitutions eft $0 = 1 + a^4 h^4$; d'où l'on tire $0 = h^4 + \frac{1}{a^4} = (h^2 + \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}) \times (hh - \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa})$. En comparant chacun de ces facteurs à la formule $hh - 2mh \text{ cof. V} + mm = 0$, on trouve pour tous les deux $mm = \frac{1}{aa}$, & $m = \frac{1}{a}$. On trouve de plus pour le premier, $-2m \text{ cof. V} = \frac{\sqrt{2}}{a}$; donc $m \text{ cof. V} = -\frac{\sqrt{2}}{2a} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$, & pour le fecond $m \text{ cof. V} = \frac{1}{a\sqrt{2}}$, & par conféquent pour tous les deux $m \text{ fin. V} = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ *. Donc l'intégrale complette cher-

* Car à caufe de $(\text{fin. V})^2 = 1 - (\text{cof. V})^2$, on a $(\text{fin. V})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ & $\text{fin. V} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

chée sera $y = a' e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}}} \text{fin.} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B'\right)$
$+ b e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \text{fin.} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B''\right)$.

EXEMPLE IV. Trouver l'intégrale finie & complette de l'équation différentielle d'un ordre quelconque $o = \frac{d^n y}{dx^n}$. L'équation qui en résulte par les substitutions est $o = h^n$, dont toutes les racines sont égales entre elles ; en la comparant avec la formule $(h-f)^k = o$, on trouve $k = n$, & $f = o$, par conséquent $e^{fx} = e^o = 1$, & l'intégrale complette sera $y = e^{fx} \times (a + bx + cx^2 + \&c. \ldots\ldots + N' x^{n-1}) = (a + bx + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots + N' x^{n-1})$.

REMARQUE. Supposons qu'on prenne *les facteurs* $h + 1 = o$, $hh + h + 1 = o$, $(hh - h + 1)^2 = o$, & qu'on fasse leur produit $= o$, on aura $o = 1 + hh + h^3 + h^4 + h^5 + h^7$. Substituant dans cette équation y pour $1 = h^o$, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour h^2, &c., on formera l'équation différentielle du septiéme ordre $o = y + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^7y}{dx^7}$. On trou-

car puisque $m = \frac{1}{a}$ & que m cos. $V = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$, on aura cos. $V = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, & $(\text{cos.} V)^2 = \frac{1}{2}$.

vera l'intégrale complette & finie de cette équation en cherchant les valeurs de y qui répondent à chacun des facteurs qu'on a choisis & en égalant à y la somme de ces valeurs. Le premier facteur $h+1=0$, donnera $y = ae^{-x}$; le facteur $hh+h+1=0$ donnera $y = a'e^{-\frac{x}{2}}$ sin. $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'\right)$, le troisième facteur $(hh-h+1)^2=0$ donne $y=a''e^{\frac{x}{2}}$ sin. $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B''\right)$ $+bxe^{\frac{x}{2}}$ sin. $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'''\right)$; donc l'intégrale complette sera $y=ae^{-x}+a'e^{-\frac{x}{2}}$ sin. $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'\right)+$ $a''e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B''\right)+bxe^{\frac{x}{2}}$ sin. $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'''\right)$.

On peut aussi prendre h, ou h^k pour un des facteurs & comparant h^k avec $(h-f)^k=0$, on aura $f=0$ & $y=a+bx+cx^2+$ &c. S'il n'y a qu'un seul facteur h, la valeur correspondante de y sera $y=ae^{fx}=ae^0=a$. L'on peut donc, par ce moyen, construire une table générale des différentielles de tous les ordres de la forme H & de leurs intégrales respectives, & cela en prenant des facteurs convenables pour former l'équation K.

195. PROBLEME. *L'équation $y=p$ fonction de x étant une intégrale particuliere de l'équation $0=Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}$, dans laquelle dx est constant &*

les quantités A, B, C *sont des fonctions de* x, *trouver l'intégrale complette de cette équation.* En divisant la proposée pat C, & faisant $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = P'$, on aura $0 = Py + \frac{P'dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$, équation que j'appelle (F), dans laquelle P & P' sont des fonctions de x. Mais, par supposition, $y = p$; donc $dy = dp$ & $ddy = ddp$; donc notre équation sera $Pp + \frac{P'dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = 0$. Supposons maintenant que $y = pz$ soit une intégrale particuliere de l'équation proposée, on aura $dy = pdz + zdp$, $ddy = pddz + 2dpdz + zddp$. Substituant ces valeurs de dy & de ddy dans l'équation F, elle deviendra $Ppz + \frac{P'zdp}{dx} + \frac{P'pdz}{dx} + \frac{zddp}{dx^2} + \frac{2dpdz}{dx^2} + \frac{pddz}{dx^2} = 0$, équation que j'appelle (N). Mais on vient de trouver $Pp + \frac{P'dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = 0$; ainsi en supprimant dans l'équation N le premier, le second & le quatrième termes dont la somme $= 0$ est multipliée par z, il viendra $\frac{P'pdz}{dx} + \frac{2dpdz}{dx^2} + \frac{pddz}{dx^2} = 0$. Multipliant cette équation par $\frac{dx^2}{pdz}$, on aura (A).... $P'dx + \frac{2dp}{p} + \frac{ddz}{dz} = 0$. L'intégrale de cette quantité différentielle est $S.P'dx + 2L.p + L.dz = S.P'dx \times L.e + L.p^2dz = L.e^{S.P'dx}p^2dz$, en supposant $L.e = 1$. Egalant cette intégrale à une constante arbitraire du même ordre $L.bdx$, on aura $e^{S.P'dx}p^2dz = bdx$, intégrale complette de l'équation A. De-là on

tire $dz = \frac{bdxe^{-S.P'dx}}{p^2}$, & $z = bS.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{p^2}$;

donc $y = pz = bpS.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{p^2}$ sera une autre intégrale particuliere de l'équation proposée, & en supposant que a' soit une constante arbitraire, on aura $y = a'p + bpS.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{p^2}$ pour l'intégrale complette & finie de la proposée.

COROLLAIRE. Si dans l'équation F on a $P = \frac{-P'q - r}{p}$, en supposant que q est $= \frac{dp}{dx}$ & $r = \frac{dq}{dx}$, l'équation $y = p$ fonction de x, sera une intégrale particuliere de la proposée, dont l'intégrale complette sera $y = a'p + bp.S.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{pp}$.... (B); car en substituant la valeur de P dont nous venons de parler dans l'équation F, la proposée deviendra (M)...... $-y.\frac{P'q + r}{p} + \frac{P'dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Mais la supposition de $y = p$ donne $dy = dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} = q$, $\frac{ddy}{dx} = dq$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$; donc en substituant ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$ dans l'équation M, on aura en ôtant la fraction, $-P'q - r + P'q + r = 0$, équation identique; donc $y = p$ sera une intégrale particuliere de la proposée, & l'équation B qui renferme deux constantes arbitraires en sera l'intégrale complette. Si on suppose $p = x^m$, & qu'on substitue dans l'équation M les valeurs de p, q, r que donne cette supposition, elle de-

viendra $-y.\left(\frac{mP'x^{m-1}+m.(m-1).x^{m-2}}{x^m}\right)$ $+\frac{P'dy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}=0$, ou (R).... $-my.\frac{P'x+m-1}{xx}+\frac{P'dy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}=0$, dont l'intégrale complette sera $y=a'x^m+bx^m.S.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{x^{2m}}$. Si on suppose de plus que $P'=ax^n$, on aura $S.P'dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}$; donc notre intégrale complette deviendra $y=a'x^m+bx^m S.\frac{e^{\frac{-ax^{n+1}}{n+1}}dx}{x^{2m}}$, équation que j'appelle (T).

On trouvera, par la même méthode, qu'en faisant $p=ax^m+b'x^n+cx^h$ &c, l'intégrale complette & finie de la proposée sera $y=a'(ax^m+b'x^n+cx^h+$ &c.$)$ $+b(ax^m+b'x^n+cx^h+$ &c.$)\times$ $S.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{(ax^m+b'x^n+cx^h+\&c.)^2}$, a' & b étant des constantes arbitraires.

Soit proposée l'équation du second ordre $ddy+ax^2dydx-axydx^2=0$, je lui donne la forme $-ayx+\frac{ax^2dy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}=0$. En la comparant à la formule R, je trouve $m=1$, $P'=ax^2$; donc si à la place de m & de ax^n, on substitue 1 & ax^2 dans l'intégrale T, on aura $y=a'x+bxS.\frac{e^{-\frac{1}{3}ax^3}dx}{x^2}$.

196. PROBLEME. *Trouver l'intégrale complette de l'équation* $o = Py + \frac{P' dx}{dy} + \frac{ddy}{dx^2}$, *en la réduisant d'abord au premier ordre.* En supposant $y = e^{S.zdx}$, on réduira la proposée à l'équation suivante $o = P + P'z + zz + \frac{dz}{dx}$, ou $o = Pdx + P'zdx + zzdx + dz$ qui est du premier ordre & ne contient que deux variables x & z, puisque P & P' sont supposés des fonctions de x. On cherchera par les méthodes précédentes, l'intégrale de cette équation. Supposant cette intégrale connue, on aura la valeur de z en x, ou $z = k$ fonction de x. Cela posé on pourra toujours avoir, au moins par approximation, l'intégrale de zdx; donc on trouvera l'intégrale $S.kdx$ qui sera $= S.zdx$, fonction de x; & parce que $y = e^{S.zdx}$, on aura en faisant $e^{S.zdx} = p$, $y = p$ fonction de x, équation qui sera une intégrale particuliere de la proposée. Donc on trouvera par le problême précédent l'intégrale finie & complette de la proposée; de sorte que l'on aura $y = a'p + bpS.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{p^2}$.

197. PROBLEME. *L'intégrale de l'équation de trois termes* $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = o$, *équation que j'appelle* (A) *étant donnée, trouver l'intégrale de l'équation de quatre termes* (B).... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = o$, *dx étant constant*, P, Q, R *étant des fonctions de x & de constantes.* Supposons, 1°. que l'équation $u = t$, fonction de x soit l'intégrale de l'équation A, prenez la différentielle dt & divisez-la par dx pour avoir $\frac{dt}{dx} = t'$, autre fonction de x. 2°. Cherchez, par la méthode ci-dessus (128), l'intégrale de l'équation $dr - \frac{rQtdx}{t'} - \frac{Rtdx}{t'} = o$, dans laquelle

$\frac{Qt}{z'}$, $\frac{Rt}{t'}$ sont des fonctions de x qu'on est censé connoître; & supposant que cette intégrale est $r = m$, fonction de x, prenez la différentielle de m, & divisez-la par dx pour avoir $\frac{dm}{dx} = n$, autre fonction de x. 3°. Cherchez (par le N°. 128) l'intégrale de l'équation $dz - \frac{zt'}{t} - ndx = o$, & supposant que cette intégrale soit $z = k$, fonction de x, on aura $y = m - k$ pour l'intégrale de l'équation B. En effet si l'on suppose $dy + Tzdx = o$, T & z étant deux variables, on aura $dy = - Tzdx$ & $ddy = - Tdzdx - zdTdx$; donc l'équation B deviendra par substitution, $- \frac{Tdz}{dx} - \frac{zdT}{dx} - zPT + Qy + R = o$, & en multipliant par $\frac{dx}{T}$, changeant les signes & ajoutant l'équation $dy + zTdx = o$, on aura l'équation (H) ..... $dy + dz + \left(zT + zP + \frac{zdT}{Tdx} - \frac{Qy}{T}\right) dx - \frac{Rdx}{T} = o$: cette équation H seroit intégrable si on pouvoit lui donner la forme (M).... $dy + dz + (y + z) V dx - \frac{Rdx}{T} = o$, supposé que V & T soient des fonctions connues de x : car en faisant $r = y + z$, on auroit $dr = dy + dz$, & l'équation M deviendroit $dr + rVdx - \frac{Rdx}{T} = o$, dont on trouveroit l'intégrale $r = m$, fonction connue de x (par le N°. 128); & en différenciant, on auroit $dr = dy + dz = dm = ndx$; donc $dy = ndx - dz$, n étant une fonction connue de x. Substituant cette valeur de dy dans l'équation $dy + zTdx = o$, on auroit en changeant les signes, $dz - zTdx - ndx = o$, dont on trouveroit l'intégrale $z = k$, fonction connue de x (par le N°. 128). Mais on a $r = y + z$; donc $y = r - z$; donc en substi-

tuant les valeurs de r & de z, on aura $y = m \dot{-} k$, intégrale cherchée de l'équation (B). Il ne s'agit donc plus que de réduire l'équation (H) à la forme M; ce qu'on fera en suppofant $\left(T + P + \frac{dT}{T\,dx}\right)z - \frac{Qy}{T} = V(z+y)$, ou (N).... $T + P + \frac{dT}{T\,dx} = - \frac{Q}{T}$, équation d'où l'on tire, en ôtant les fractions & transpofant, $Q\,dx + T^2\,dx + P\,T\,dx + dT = 0$. Si on fuppofe maintenant $u = e^{S.t''\,dx}$, t'' étant une nouvelle variable, & $L.e = 1$, on aura, en fuppofant toujours dx conftant, $du = e^{S.t''\,dx}\,t''\,dx$, $ddu = e^{S.t''\,dx}\,dt''\,dx + e^{S.t''\,dx}\,t''t''\,dx^2$. Donc en fubftituant, l'équation A deviendra $e^{S.t''\,dx}\frac{dt''}{dx} + e^{S.t''\,dx}\,t''t'' + P\,e^{S.t''dx}\,t'' + Q\,e^{S.t''\,dx} = 0$. Si l'on multiplie cette équation par dx, qu'on la divife par $e^{S.t''\,dx}$ & qu'on faffe $t'' = T$, on aura l'équation $Q\,dx + T^2\,dx + P\,T\,dx + dT = 0$, que nous avons trouvée ci-deffus; donc la valeur de T que donnera cette équation peut être fubftituée à la place de t'' dans l'équation $u = e^{S.t''\,dx}$; c'eft-à-dire, qu'on peut regarder t'' & T comme repréfentant la même fonction de x.

Pour avoir la valeur de T, je remarque qu'on a les équations $T = t''$, $u = t$, $u = e^{S.t''\,dx}$; donc $t = e^{S.t''\,dx}$, $L.t = L.e^{S.t''\,dx} = S.t''\,dx \times L.e = S.t''dx$, & en différentiant, $\frac{dt}{t} = t''\,dx = T\,dx$. Mais on fuppofe ici $dt = t'\,dx$; donc $\frac{t'\,dx}{t} = T\,dx$, ou $T =$

$\frac{t'}{t}$, fonction connue de x, & puisque $V = -\frac{Q}{T}$ (ce qu'on tire aisément de l'équation N), on aura $V = -\frac{Qt}{t'}$, fonction connue de x; donc l'équation $dr + rVdx - \frac{Rdx}{T} = 0$, deviendra $dr - \frac{rQtdx}{t'} - \frac{Rtdx}{t'} = 0$, comme nous l'avons mise dans la solution, & son intégrale sera $r = m$, fonction connue de x; donc l'intégrale de l'équation B sera $y = m - k$.

COROLLAIRE. Donc pour intégrer l'équation B, on n'a qu'à retrancher le terme R & substituer u pour y, du pour dy & ddu pour ddy pour avoir l'équation $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$. On cherchera l'intégrale de *cette équation* par les méthodes précédentes, ensuite on trouvera l'intégrale de l'équation B par le présent problême.

198. PROBLEME. *Une intégrale particulière de l'équation différentielle de trois termes* $Au + \frac{Bdu}{dx} + \frac{Cddu}{dx^2} = 0$, *étant donnée, trouver l'intégrale complette de l'équation de quatre termes* $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = K$, *ou de l'équation* $D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = 0$, *en faisant* $-K = D$, dx *étant constant, & A, B, C, D des fonctions de x.* Divisez les équations proposées par C pour leur donner les formes (A)... $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$, & (B)... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$. Maintenant l'intégrale particulière de l'équation A étant supposée $u = mt$, fonction de x, cherchez (par le N°. 195), une autre intégrale particulière de la même équation qui sera

$u = n$, fonction de x. Cherchez ensuite par le problême précédent les deux intégrales particulières correspondantes de l'équation B, & supposant que ces intégrales soient représentées par $y = p$ & $y = q$, p & q étant des fonctions de x ; l'intégrale complette de l'équation B sera $y = ap + bq$, a & b étant des constantes arbitraires : car puisque $y = p$ & $y = q$, $y = ap$, & $y = bq$ seront des intégrales particulières de l'équation B, & $y = ap + bq$ en sera l'intégrale complette, ce qu'on prouvera par la méthode ci-dessus (194.).

REMARQUE. On voit, par les deux problêmes précédens, que si l'on a une équation à trois termes de la forme A, dont l'intégrale soit donnée, on pourra toujours trouver l'intégrale de l'équation B de quatre termes, c'est-à-dire que si l'on suppose $R = 0$, & qu'on trouve l'intégrale de $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$, on trouvera aussi l'intégrale en supposant R une fonction de x. Cette méthode seroit applicable aux équations du 3e, 4e, &c. ordre. Et en général si l'on a l'équation $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$ &c. . . . . $+ \frac{Md^my}{dx^m} = \pm R$, dx étant constant & les quantités A, B, C. . . . M, R étant des fonctions de x, si on trouve l'intégrale d'un ordre quelconque de cette équation en supposant $R = 0$, on pourra trouver l'intégrale du même ordre en supposant que R est une fonction de x.

Ils ne sera pas inutile de faire observer qu'on peut souvent intégrer facilement une équation donnée en l'élevant à un ordre supérieur. Ainsi en différenciant l'équation (A)..... $8dx^2 + 2yddy - dy^2 + 4yydx^2 = 0$, on aura (B)...... $d^3y - 4dydx^2 = 0$, équation dont une intégrale particulière sera $y = e^{fx}$. En faisant $f = 0$, on a $y = e^0 = 1$; les équations $y = 2e^{2x}$, $y = -2e^{-2x}$, seront encore des intégrales particulières de la même équation. Multipliant e^0 par a, $2e^{2x}$ par

$\frac{b}{2}$, $-2e^{-2x}$ par $-\frac{c}{2}$, on aura $y = a + be^{2x}$ $+ce^{-2x}$ pour l'intégrale finie & complette de l'équation B, a, b & c, étant trois constantes arbitraires. Cette intégrale contient l'intégrale de l'équation (A) qui est d'un ordre moins élevé, comme un cas particulier : car l'intégrale de l'équation A ne peut contenir que deux constantes arbitraires. Si on différencie donc notre intégrale deux fois & qu'on substitue dans l'équation A les valeurs de y, dy & ddy, il faudra que le résultat satisfasse à l'équation A, ce qu'on obtiendra en comparant les constantes; ainsi dans le cas présent on trouvera $c = \frac{aa-2}{4b}$, & l'intégrale complette de l'équation A sera $y = a + be^{2x} + \frac{aa-2}{4b} . e^{-2x}$. On pourra aussi en différenciant une équation donnée, une, deux, &c. fois, parvenir souvent à une équation d'un ordre supérieur de la forme de celles que nous avons déja intégrées, & on aura par là l'intégrale cherchée.

DE QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRER CERTAINES EQUATIONS.

199. Soit une équation formée de tant de termes qu'on voudra de cette forme $ay^n dy^m ddy^p dx^q$ dans lesquels a, n, m, p, q sont constans, & $m + 2p + q$ constant; je dis que si $n + m + p$ est aussi constant, l'équation sera intégrable : on suppose $m + 2p + q$ constant afin que les quantités infiniment petites soient du même ordre. Maintenant si $n + m + p$ est constant, on aura, en faisant $y = e^{S.tdx}$, une équation d'où les exponentielles disparoîtront, & qui, ne contenant que t, dt & dx, pourra s'intégrer par les méthodes connues (on suppose dx constant. Cette méthode est du célèbre M. d'Alembert.

Soit l'équation du premier ordre & dont parle M. le Marquis de Condorcet dans le quatrième volume des Mémoires de l'Académie de Turin, $4x^3dy - 2x^2ydy - 2x^2ydx + xy^2dx + xy^2dy - 2y^3dx - x^2dx - x^2dy + 3xydx + xydy - 2yydx = 0$. Si on le met sous cette forme $Adx + Bdy = 0$, on trouvera qu'en la multipliant par un facteur $M = \frac{1}{\sqrt{(x-y).xxyy + xxy - x^3}}$, elle devient intégrable: car alors $\frac{(d.AM)}{dy} = \frac{(d.BM)}{dx}$, & l'intégrale cherchée est $= L.\left[y - \sqrt{(x-y)}\right] - L.\left[y + \sqrt{(x-y)}\right] - \frac{\sqrt{(x-y)}}{x} = C$.

Soit l'équation $2ayddy - 4ady^2 - y^3dx^2(1+xx)^{-\frac{3}{2}} = 0$. Je la multiplie par le facteur $M = \frac{1}{y^3}$ pour avoir $\frac{2ayddy - 4ady^2}{y^3} - \frac{dx^2}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = 0$, dont l'intégrale en ajoutant la constante Adx, est $\frac{2ady}{yy} - \frac{xdx}{\sqrt{(1+xx)}} = Adx$; & en intégrant de nouveau, on aura $-\frac{2a}{y} - \sqrt{(1+xx)} = Ax + B$.

200. Soit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}} \ldots (A)$, je fais disparoître les fractions pour avoir $dx\sqrt{(1-yy)} = dy\sqrt{(1-xx)}$, & en intégrant par parties, il vient $x\sqrt{(1-yy)} + S.\frac{xydy}{\sqrt{(1-yy)}} = y\sqrt{(1-xx)} +$

$S.\frac{yxdx}{\sqrt{(1-xx)}}+C$ *. Mais l'équation A étant multipliée par xy & ensuite intégrée, donne $S.\frac{xydx}{\sqrt{(1-xx)}}=S.\frac{xydy}{\sqrt{(1-yy)}}$; donc l'équation précédente, en effaçant les quantités égales qui se trouvent dans les deux membres, deviendra $x\sqrt{(1-yy)}=y\sqrt{(1-xx)}+C$; équation algébrique qui donne l'intégrale complette de la proposée.

Si l'on avoit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$.... (B), en ôtant les fractions & prenant ensuite l'intégrale par parties, on trouveroit $x\sqrt{(a+by+cyy)}-S.\frac{(b+2cy)xdy}{2\sqrt{(a+by+cyy)}}=y\sqrt{(a+bx+cxx)}-S.\frac{(b+2cx).ydx}{2\sqrt{(a+bx+cxx)}}+C$.... (H). Si l'on multiplie l'équation B par xy, on aura en intégrant, $S.\frac{xydx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=S.\frac{xydy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$. Mais si, avant d'intégrer on multiplie par y, on trouvera $S.\frac{ydx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=$

* Si l'on fait attention que $S.pdx=px-S.xdp$ (voyez le n°. 79), on verra facilement que $S.dx.\sqrt{(1-yy)}=x\sqrt{(1-yy)}+S.\frac{xydy}{\sqrt{(1-yy)}}$.

$S. \frac{ydy}{\sqrt{(a+by+cyy)}} = \frac{1}{c}\sqrt{(a+by+cyy)}$ $- \frac{b}{2c} S. \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$, comme il est aisé de le voir en différenciant. De même $S. \frac{xdy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$ $= S. \frac{xdx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} = \frac{1}{c}\sqrt{(a+bx+cxx)}$ $- \frac{b}{2c} S. \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$; donc faisant ces substitutions dans l'équation H, effaçant ce qui se détruit, on aura cette équation algébrique $x\sqrt{(a+by+cyy)}$ $- \frac{b}{2c}\sqrt{(a+bx+cxx)} = y\sqrt{(a+bx+cxx)}$ $- \frac{b}{2c}.\sqrt{(a+by+cyy)} + C$, ou bien $\left(x + \frac{b}{2c}\right) \times$ $\sqrt{(a+by+cyy)} = \left(y + \frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+bx+cxx)} + C$, qui est l'intégrale de l'équation proposée. Il est bon de faire attention à cette méthode ingénieuse que nous devons au célèbre M. de La Grange.

L'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+exxx+fx^4)}} =$ $\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$ dont aucun des membres n'est intégrable algébriquement a néanmoins une intégrale algébrique exprimée en général par l'équation $A + B(x+y) + C(xx+yy) + Dxy + E(xxy + xyy) + Fxxyy = 0$. En effet si on différencie cette équation, il vient $\left[B + 2Cx + Dy + E(2xy+yy)\right.$ $\left.+ 2Fxyy\right]dx + \left[B + 2Cy + Dx + E(2yx+yy)\right.$

$+2Fyxx\Big] dy=0$; mais en tirant de la même équation la valeur de x en y, & ensuite celle de y en x, on trouvera $2x(C+Ey+Fyy)+B+Dy+Eyy=\sqrt{\Big[(B+Dy+Eyy)^2-4(A+By+Cyy)\times(C+Ey+Fyy)\Big]}$. Et de même $2y(C+Ex+Fxx)+B+Dx+Exx=\sqrt{\Big[(B+Dx+Exx)^2-4(A+Bx+Cxx)(C+Ex+Fxx)\Big]}$; de sorte qu'en faisant $a=BB-4AC$; $b=2BD-4(AE+BC)$; $c=2BE+DD-4(AF+CC+BE)$; $e=2DE-4(BF+CE)$; $f=EE-4CF$, on aura $dx\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}=dy\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}$; & par conséquent $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$, qui est l'équation proposée. Mais par ce que les coefficiens donnés a, b, c, e, f ne sont qu'au nombre de cinq, & que les quantités A, B, C, D, E, F sont au nombre de six, il est évident qu'il en restera une indéterminée qui tiendra lieu de la constante arbitraire qui doit se trouver dans l'intégrale complette de l'équation proposée. Nous allons maintenant donner une méthode directe pour intégrer les équations qui ont la forme de celles dont on vient de parler, elle est fondée sur le principe suivant.

PRINCIPE. *Quand on a une équation du premier ordre dont on ne peut trouver l'intégrale, il faut la différencier & examiner si en combinant cette nouvelle équation avec la proposée, on pourroit trouver une équation intégrale du premier degré*

autre

autre que la proposée; car alors en chassant, par le moyen de ces deux équations les premieres différences, on aura l'intégrale cherchée. Si l'intégration ne réussit pas de cette maniere, on passera à la différentielle du troisieme degré & l'on cherchera si l'on peut parvenir à une nouvelle équation du second degré; en ce cas il n'y aura plus qu'à éliminer les différences secondes & troisiemes par le moyen de l'équation proposée & de sa différentielle, & ainsi de suite.

Reprenons l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$, je fais l'un & l'autre membre $= dt$, & je quarre, il vient $dt^2 = \frac{dx^2}{a+bx+cxx}$, $dt^2 = \frac{dy^2}{a+by+cyy}$; donc $\frac{dx^2}{dt^2} = a+bx+cxx$, & $\frac{dy^2}{dt^2} = a+by+cyy$. Je différencie maintenant ces équations en supposant dt constant, & divisant la première par dx & la seconde par dy, il viendra $\frac{2ddx}{dt^2} = b+2cx$; $\frac{2ddy}{dt^2} = b+2cy$. Ajoutant ces deux équations ensemble & faisant $x+y=p$, on aura l'équation $\frac{2ddp}{dt^2} = 2b+2cp$, laquelle étant multipliée par dp & ensuite intégrée, donne $\frac{dp^2}{dt^2} = C+2bp+cp^2$; d'où l'on tire $\frac{dp}{dt} = \sqrt{(C+2bp+cpp)}$. Mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{(a+bx+cxx)} + \sqrt{(a+by+cyy)}$. Donc on aura enfin $\sqrt{(a+bx+cxx)} + \sqrt{(a+by}$

$+2Fyxx$] ... $y) + c(x+y)^2$]

tion la vale ... quation proposé

trouvera ... de celle q

$\sqrt{}$ [... métho

(C ... $+ex$

$y^2 + fy^4)$, je fais $\frac{dz}{t}$ = $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}$, & $\frac{dz}{t}$ = $\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$. Quarrant ces équations, multipliant ensuite par le dénominateur du second membre & divisant par $\frac{dz^2}{t^2}$, différenciant en regardant dz comme constant, divisant la première par dx & la seconde par dy, & transposant, l'on aura $\frac{2tdtdx+2ttddx}{dz^2} = b+2cx+3ex^2+4fx^3$; $\frac{2tdtdy+2ttddy}{dz^2} = b+2cy+3ey^2+4fy^3$. J'ajoute ensemble ces deux dernières équations, & je fais $x+y=p$, $x-y=q$, & $dt=Mdp+Ndq$, j'aurai en divisant par 2, $\frac{tMdp^2+tNdpdq+ttddp}{dz^2} = b+cp+\frac{3e}{4}(pp+qq)+\frac{f}{2}(p^3+3pq^2)$, & mettant au lieu de $\frac{dpdq}{dz^2}$ sa valeur $\frac{dx^2-dy^2}{dz^2}$ = $\frac{a+bx+cxx+ex^3+fx^4}{t^2} - \frac{a+by+cyy+ey^3+fy^4}{t^2}$

CAI

LE

ERES

IE.

$bq + cpq +$

, aprè

ur

$p)(t - Nq,$

$+ \frac{f}{2}[t(p^3 + 3pq^2) -$

posons maintenant que t soit =
= o, & N = P, fonction de p san
$Pdq + qdP$. Mais $dt = Mdp + N$.

donc $qdP = Mdp$, & $M = \frac{q.dP}{dp}$. Donc

deviendra $\frac{PPq^3(dPdp + Pddp)}{dz^2} = Pq^3\left(\frac{e}{2}\right.$ -

ou en divisant par Pq^3, $\frac{Pdp\, dP + PPddp}{dz^2} = \frac{e}{2} + fp$.

Si l'on multiplie cette équation par $2dp$, elle deviendra intégrable, & son intégrale sera à cause de dz constant, sera, dis-je, $\frac{PPdp^2}{dz^2} = C + ep + fp^2$;

donc $\frac{Pdp}{dz} = \sqrt{(C + ep + fp^2)}$; mais $\frac{dp}{dz} =$
$\frac{dx + dy}{dz} = \frac{\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)}}{t} +$
$\frac{\sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}}{t}$; Donc substituant cette valeur, mettant à la place de p, $x + y$, & à la place de t, Pq, ou bien $P(x - y)$, on aura, après avoir multiplié par $x - y$, l'équation $\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)} + \sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)} =$

$(x-y). \sqrt{[C+e(x+y)+f(x+y)^2]}$, qui est l'intégrale cherchée. Si l'équation proposée étoit

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}} = 0,$$

on n'auroit qu'à changer dans l'intégrale qu'on vient de trouver, le signe du radical $\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}$.

Les intégrales $S. \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}$, $S. \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$ n'appartiennent ni aux logarithmes, ni aux arcs de cercle; & on doit les rapporter à un genre de transcendantes entierement *inconnu*.

On doit donc conclure de ce qui précéde qu'il peut très-souvent arriver qu'une équation séparée dont aucun des membres n'est intégrale algébriquement, ni par les logarithmes, ni par les arcs de cercle, ait cependant une intégrale algébrique. Nous reprendrons cette matiére importante dans la seconde partie de cette section.

FIN DU TOME IV.

TABLE
DES MATIERES

Contenues dans ce Volume.

SECONDE PARTIE.



CALCUL INTÉGRAL.



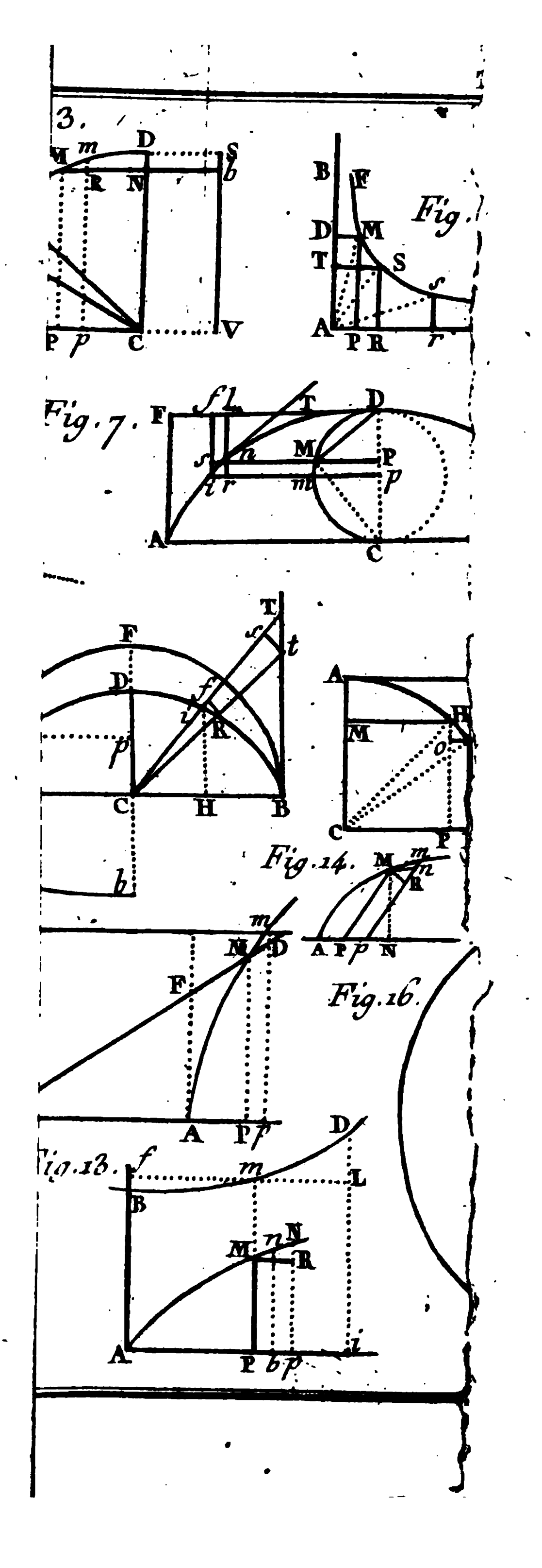
SECTION III.

De l'Intégration des Formules Différentielles, & des Équations Différentielles.

Fin de la Table du Tome IV.

DE L'IMPRIMERIE

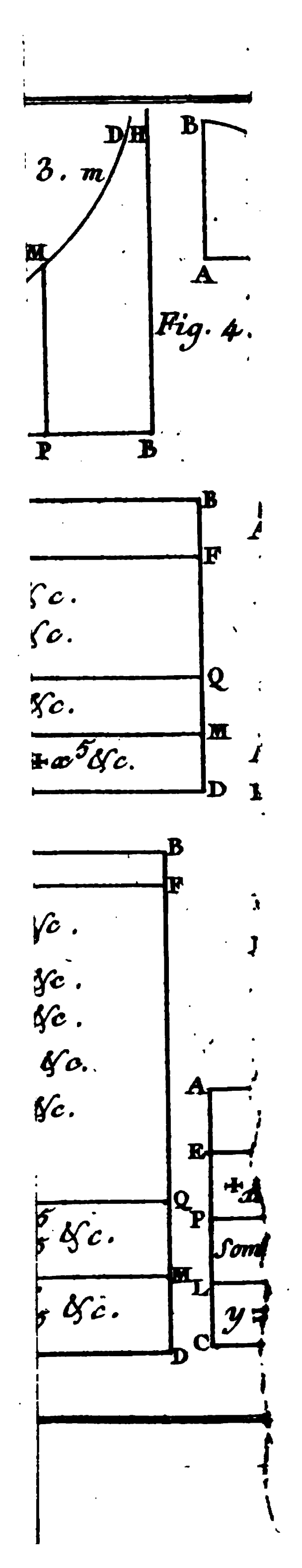
De la VEUVE BALLARD, rue des Mathurins, 1774.



3.
M
m
D
S
b
R
N
P
p
C
V
B
F
Fig.
D
M
T
S
s
A
P
R
r
Fig. 7.
f
L
T
D
F
M
P
s
n
p
i
r
m
A
C
T
s
t
F
D
f
i
R
p
C
H
B
b
A
H
M
o
C
P
Fig. 14.
M
m
n
R
A
P
p
N
m
M
D
F
Fig. 16.
A
P
p
D
Fig. 13.
f
m
L
B
M
n
N
R
A
P
b
p


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06531 7714


UNIVERSITY OF MICHIGAN



D
H
B
M
A
Fig. 4.
P
B
F
Q
D
A
E
P
L
C